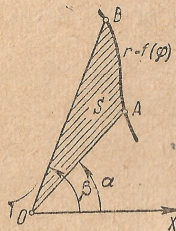


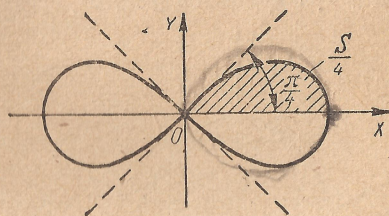
2°. Площадь в полярных координатах. Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r=f(\varphi)$, то площадь сектора AOB (черт. 46), ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами OA и OB , соответствующими значениям $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, выразится интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Пример 5. Найти площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (черт. 47).



Черт. 46.



Черт. 47.

Решение. В силу симметрии кривой определяем сначала одну четверть искомого площади

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Отсюда $S = a^2$.

1623. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

1624. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = \ln x$, осью OX и прямой $x = e$.

1625*. Найти площадь, ограниченную кривой $y = x(x-1)(x-2)$ и осью OX .

1626. Найти площадь, ограниченную кривой $y^3 = x$, прямой $y = 1$ и вертикалью $x = 8$.

1627. Вычислить площадь, ограниченную одной полувошной синусоиды $y = \sin x$ и осью OX .

1628. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = \operatorname{tg} x$, осью OX и прямой $x = \frac{\pi}{3}$.

1629. Найти площадь, заключенную между гиперболой $xy = m^2$, вертикалями $x = a$ и $x = 3a$ ($a > 0$) и осью OX .

1630. Найти площадь, содержащуюся между локонем Аньези $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ и осью абсцисс.

1631. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью OY .

1632. Найти площадь, ограниченную параболой $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

1633. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

1634. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 3 - 2x$ от параболы $y = x^2$.

1635. Вычислить площадь, заключенную между параболой $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ и прямой $y = 2x$.

1636. Вычислить площадь, заключенную между параболой $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

1637. Вычислить площадь, заключенную между локонем Аньези $y = \frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y = \frac{x^2}{2}$.

1638. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

1639. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямой $x = 2a$.

1640*. Найти всю площадь, ограниченную астроидой

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

1641. Найти площадь между цепной линией

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

осью OY и прямой $y = \frac{a}{2e}(e^2 + 1)$.

1642. Найти площадь, ограниченную кривой $a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

1643. Вычислить площадь, содержащуюся внутри кривой

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

1644. Найти площадь между равнобочной гиперболой $x^2 - y^2 = 9$, осью OX и диаметром, проходящим через точку (5; 4).

1645. Найти площадь между кривой $y = \frac{1}{x^2}$, осью OX и ординатой $x = 1$ ($x > 1$).

1646*. Найти площадь, ограниченную циссоидой $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ и ее асимптотой $x = 2a$ ($a > 0$).

1647*. Найти площадь между строфоидой $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ и ее асимптотой ($a > 0$).

1648. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 8$ разделен параболой $y^2 = 2x$.