**1649.** Вычислить площадь, содержащуюся между окружностью $x^2+y^2=16$ и параболой $x^2=12(y-1)$.

**1650.** Найти площадь, содержащуюся внутри астроиды

$$x=a\cos^3 t;\quad y=b\sin^3 t.$$

**1651.** Найти площадь, ограниченную осью $OX$ и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

**1652.** Найти площадь, ограниченную одной ветвью трохоиды

$$\begin{cases} x=at-b\sin t, \\ y=a-b\cos t \end{cases} \quad (0<b\leqslant a)$$

и касательной к ней в низших ее точках.

**1653.** Найти площадь, ограниченную кардиоидой

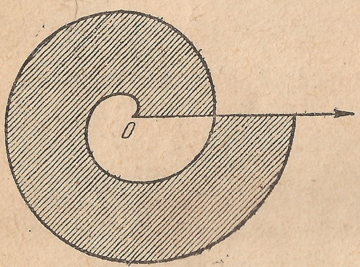
$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t), \\ y=a(2\sin t-\sin 2t). \end{cases}$$

**1654*.** Найти площадь петли декартова листа

$$x=\frac{3at}{1+t^3};\qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

**1655*.** Найти всю площадь кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

**1656*.** Найти площадь, содержащуюся между первым и вторым витками спирали Архимеда $r=a\varphi$ (черт. 48).




Черт. 48.

**1657.** Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\cos 2\varphi$.

**1658.** Найти всю площадь, ограниченную кривой $r^2=a^2\sin 4\varphi$.

**1659*.** Найти площадь, ограниченную кривой $r=a\sin 3\varphi$.

**1660.** Найти площадь, ограниченную улиткой Паскаля

$$r=2+\cos\varphi.$$

**1661.** Найти площадь, ограниченную параболой $r=a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ и полупрямыми $\varphi=\frac{\pi}{4}$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

**1662.** Найти площадь эллипса $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(\varepsilon<1)$.

**1663.** Найти площадь, ограниченную кривой $r=2a\cos 3\varphi$ и лежащую вне круга $r=a$.

**1664*.** Найти площадь, ограниченную кривой $x^4+y^4=x^2+y^2$.

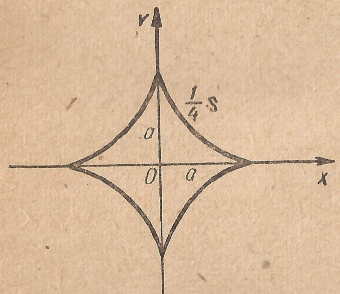


## § 8. Длина дуги кривой

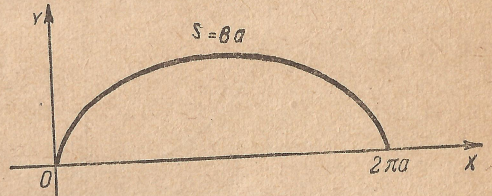
1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина $s$ дуги кривой $y=f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x=a$ и $x=b$, равна

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Пример 1. Найти длину астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (черт. 49).




Черт. 49.




Черт. 50.

Решение. Дифференцируя уравнение астроиды, получим:

$$y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Поэтому для длины дуги одной четверти астроиды имеем:

$$\frac{1}{4}s=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx=\frac{3}{2}a.$$

Отсюда $s=6a$.

2° Длина дуги, кривой, заданной параметрически. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, то длина дуги $s$ кривой равна

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

где $t_1$ и $t_2$ — значения параметра, соответствующие концам дуги.

Пример 2. Найти длину одной арки циклоиды (черт. 50)

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

Решение. Имеем $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$ и $\frac{dy}{dt}=a\sin t$. Поэтому

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a.$$

Пределы интегрирования $t_1=0$ и $t_2=2\pi$ соответствуют крайним точкам арки циклоиды.