Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c \in [a, b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то по определению полагают

$$(2)\ \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\beta \to 0} \int_{c+\beta}^{b} f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ $\left(f(c) \underset{a<c<b}{\to} \infty\right)$ называется сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства (2) и расходящимся если не существует хотя бы один из них.

Исследовать на сходимость-расходимость на основе определения следующие интегралы.

1) Вычислить (или установить расходимость)

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} (\sin b - \sin 0) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \sin b,$$ т.е. предел не существует.

Значит, несобственный интеграл расходится.

2) Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{a \to -\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{-1} = \lim_{a \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1,$$

т.е. несобственный интеграл сходится.