Таким образом, при $\alpha < p \le 1$ $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится, при $p > 1$ сходится.

2) Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x})}{e^{\sin x}-1}\,dx.$$

$f(x) \to \infty$ при $x \to 0+$.

По теореме об эквивалентных бесконечно малых

$$\ln(1+\sqrt[5]{x}) \sim x^{\frac{1}{5}},\quad e^{\sin x}-1 \sim \sin x \sim x$$

при $x \to 0+$.

Получим, что подынтегральная функция $f(x)$ эквивалентна

$$\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x})}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{\sqrt[5]{x}}{x} \sim \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} \text{ при } x \to 0.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{4}{5}}} = \left.\frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{\frac{1}{5}}\right|_0^1 = 5\sqrt[5]{x}\Big|_0^1 = 5(\sqrt[5]{1}-\sqrt[5]{0}) = 5,$$

значит, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{4}{5}}}$ сходится, тогда

исходный $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[5]{x})}{e^{\sin x}-1}\,dx$ сходится.