Решение. Точка разрыва подынтегральной функции: $x=1$. Применив формулу Лагранжа, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)\cdot 4x_1^3}}=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{2x_1^{\frac{3}{2}}},$$

где $x<x_1<1$. Следовательно, при $x\to 1$ получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Так как интеграл

$$\int_0^1\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}dx$$

сходится, то данный интеграл (6) также сходится.

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1546. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1547. $\int_{-1}^2\frac{dx}{x}$.

1548. $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$.

1549. $\int_0^3\frac{dx}{(x-1)^2}$.

1550. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1551. $\int_1^\infty\frac{dx}{x}$.

1552. $\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$.

1553. $\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}$.

1554. $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}$.

1555. $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

1556. $\int_0^\infty\sin x\,dx$.

1557. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln x}$.

1558. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1559. $\int_a^\infty\frac{dx}{x\ln x}$ $(a>1)$.

1560. $\int_a^\infty\frac{dx}{x\ln^2 x}$ $(a>1)$.

1561. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}x\,dx$.

1562. $\int_0^\infty e^{-kx}dx$ $(k>0)$.

1563. $\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}dx$.

1564. $\int_2^\infty\frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

1565. $\int_0^\infty\frac{dx}{x^3+1}$.

1566. $\int_0^1\frac{dx}{x^3-5x^2}$.

Исследовать сходимость интегралов:

1567. $\int_0^{100}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$.

1568. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

1569. $\int_{-1}^\infty\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

1570. $\int_0^\infty\frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

1571. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

1572. $\int_1^2\frac{dx}{\ln x}$.

1573. $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty\frac{\sin x}{x^2}dx$.

1574*. Доказать, что эйлеров интеграл 1-го рода (*бэта-функция*)

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

сходится при $p>0$ и $q>0$.

1575*. Доказать, что эйлеров интеграл 2-го рода (*гамма-функция*)

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

сходится при $p>0$.

§ 4. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и $x=\varphi(t)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$, на отрезке $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, где $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$, причем $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 1. Найти

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\quad(a>0).$$