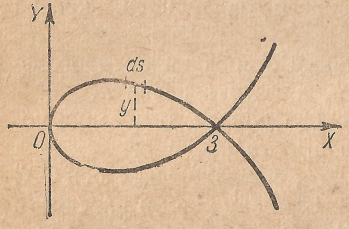
§ 10. Площадь поверхности вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $y=f(x)$ между точками $x=a$ и $x=b$, выражается формулой

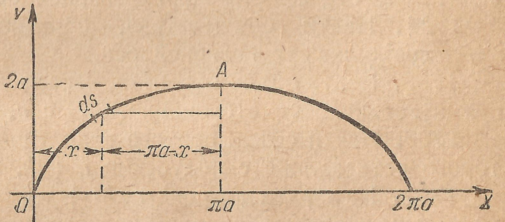
$$S_X=2\pi\int_a^b y\frac{ds}{dx}\,dx=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1}$$

(ds — дифференциал дуги кривой).

В случае иного задания уравнения кривой площадь поверхности S_X получается из формулы (1) путем соответствующей замены переменных.



Черт. 54.



Черт. 55.

Пример 1. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX петли кривой $9y^2=x(3-x)^2$ (черт. 54).

Решение. Для верхней части кривой при $0\leqslant x\leqslant 3$ имеем: $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. Отсюда дифференциал дуги $ds=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$. На основании формулы (1) площадь поверхности

$$S=2\pi\int_0^3\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=3\pi.$$

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ вокруг ее оси симметрии (черт. 55).

Решение. Искомая поверхность образуется вращением дуги OA вокруг прямой AB, уравнение которой $x=\pi a$. Принимая y за независимую переменную и учитывая, что ось вращения AB сдвинута относительно координатной оси OY на расстояние πa, будем иметь:

$$S=2\pi\int_0^{2a}(\pi a-x)\frac{ds}{dy}\cdot dy.$$

Переходя к переменной t, получим:

$$S=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(\pi a-at+a\sin t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\pi}\left(\pi\sin\frac{t}{2}-t\sin\frac{t}{2}+\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=4\pi a^2\left[-2\pi\cos\frac{t}{2}+2t\cos\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=8\pi\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2.$$

1714. Размеры параболического зеркала AOB указаны на черт. 56. Требуется найти площадь поверхности этого зеркала.

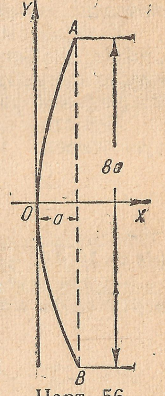
1715. Найти площадь поверхности «веретена», которое получается в результате вращения одной полуволны синусоиды $y=\sin x$ вокруг оси OX.

1716. Найти площадь поверхности, образованной вращением части тангенсоиды $y=\operatorname{tg} x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{4}$ вокруг оси OX.

1717. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $y=e^{-x}$, от $x=0$ до $x=+\infty$.

1718. Найти площадь поверхности (называемой *катеноидом*), образованной вращением цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ вокруг оси OX, в пределах от $x=0$ до $x=a$.

1719. Найти площадь поверхности вращения астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ вокруг оси OY.



Черт. 56.

1720. Найти площадь поверхности вращения кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ вокруг оси OX, от $y=1$ до $y=e$.

1721*. Найти поверхность тора, образованного вращением окружности $x^2+(y-b)^2=a^2$ вокруг оси $OX\,(b>a)$.

1722. Найти площадь поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг: 1) оси OX; 2) оси $OY\,(a>b)$.

1723. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$ и $y=a(1-\cos t)$ вокруг: а) оси OX; б) оси OY; в) касательной к циклоиде в ее высшей точке.

1724. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кардиоиды

$$\left.\begin{aligned}x&=a(2\cos t-\cos 2t),\\ y&=a(2\sin t-\sin 2t).\end{aligned}\right\}$$