1725. Определить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

1726. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r=2a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

§ 11. Моменты. Центры тяжести. Теоремы Гульдена

1°. Статический момент. *Статическим моментом* относительно оси l материальной точки A, имеющей массу m и отстоящей от оси l на расстоянии d, называется величина $M_l=md$.

Статическим моментом относительно оси l системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, лежащих в одной плоскости с осью и расположенных от нее на расстояниях $d_1, d_2, \ldots, d_n$, называется сумма

$$M_l=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i, \qquad (1)$$

причем расстояния точек, лежащих по одну сторону оси l, берутся со знаком плюс ($+$), а по другую — со знаком минус ($-$). Аналогично определяется *статический момент системы точек* относительно плоскости.

Если массы непрерывно заполняют линию или фигуру плоскости XOY, то статические моменты M_X и M_Y относительно координатных осей OX и OY вместо сумм (1) выражаются соответствующими интегралами. Для случая геометрических фигур плотность считается равной единице.

В частности: 1) для кривой $x=x(s)$; $y=y(s)$, где параметр s есть длина дуги, имеем:

$$M_X=\int_0^L y(s)\,ds;\quad M_Y=\int_0^L x(s)\,ds \qquad (2)$$

($ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ — дифференциал дуги);

2) для плоской фигуры, ограниченной кривой $y=y(x)$, осью OX и двумя вертикалями $x=a$ и $y=b$, получаем:

$$M_X=\frac{1}{2}\int_a^b y\,|y|\,dx;\quad M_Y=\int_a^b x\,|y|\,dx. \qquad (3)$$

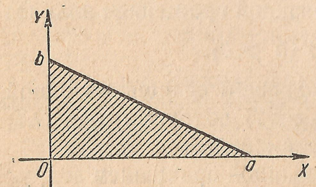
Пример 1. Найти статические моменты относительно осей OX и OY треугольника, ограниченного прямыми: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$ (черт. 57).

Решение. Здесь $y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)$. Применяя формулы (3), получаем:

$$M_X=\frac{b^2}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=\frac{ab^2}{6}$$

и

$$M_Y=b\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{a^2b}{6}.$$



Черт. 57.

2°. Момент инерции. *Моментом инерции* относительно оси l материальной точки массы m, отстоящей от оси l на расстоянии d, называется число $I_l=md^2$.

Моментом инерции относительно оси l системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ называется сумма

$$I_l=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2,$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — расстояния точек от оси l. В случае сплошной массы вместо суммы получаем соответствующий интеграл.

Пример 2. Найти момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

Решение. Основание треугольника примем за ось OX, а его высоту — за ось OY (черт. 58).

Разобьем треугольник на бесконечно тонкие горизонтальные полоски толщины dy, играющие роль элементарных масс dm. Используя подобие треугольников, получаем:

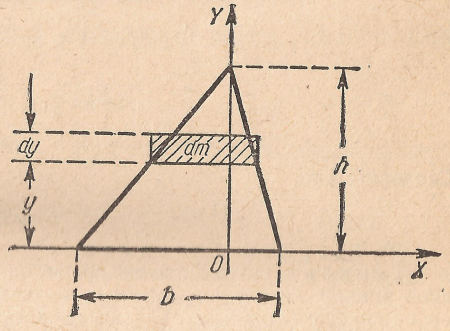
$$dm=b\frac{h-y}{h}dy$$

и

$$dI_X=y^2dm=\frac{b}{h}y^2(h-y)\,dy.$$

Отсюда

$$I_X=\frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)\,dy=\frac{1}{12}bh^3.$$



Черт. 58.

3°. Центр тяжести. *Координаты центра тяжести* плоской фигуры (дуги или площади) массы M вычисляются по формулам

$$\bar{x}=\frac{M_Y}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_X}{M},$$

где M_X и M_Y — статические моменты массы. В случае геометрических фигур масса M численно равна соответствующей дуге или площади.

Для координат центра тяжести $(\bar{x};\ \bar{y})$ дуги плоской кривой $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, соединяющей точки $A(a;\ f(a))$ и $B(b;\ f(b))$, имеем:

$$\bar{x}=\frac{\int_A^B x\,ds}{s}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx},\qquad \bar{y}=\frac{\int_A^B y\,ds}{s}=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx}.$$

Координаты центра тяжести $(\bar{x};\ \bar{y})$ криволинейной трапеции $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$ могут быть вычислены по формулам

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b xy\,dx}{S},\qquad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{S},$$

где $S=\int_a^b y\,dx$ — площадь фигуры.