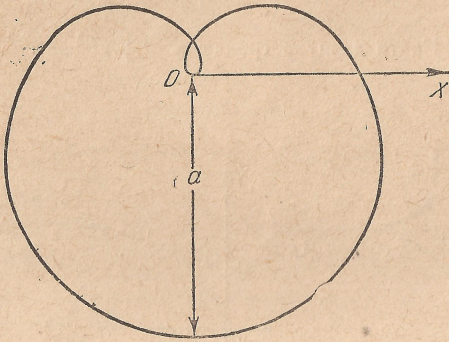


Если кривая задана уравнением $r = f(\varphi)$ в полярных координатах, то длина дуги s равна

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi,$$

где α и β — значения полярного угла в крайних точках дуги



Черт. 51.

Пример 3. Найти длину всей кривой $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ (черт. 51). Вся кривая описывается точкой при изменении φ от 0 до 3π .

Решение. Имеем $r' = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$, поэтому длина всей дуги кривой

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

1665. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки $x = 4$.

1666*. Найти длину цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от вершины $A(0; a)$ до точки $B(b; h)$.

1667. Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

1668. Найти длину дуги кривой $y = e^x$, содержащейся между точками $(0; 1)$ и $(1; e)$.

1669. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

1670. Найти длину дуги $y = \arcsin(e^{-x})$ от $x = 0$ до $x = 1$.

1671. Вычислить длину дуги кривой $x = \ln \sec y$, содержащейся между $y = 0$ и $y = \frac{\pi}{3}$.

1672. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ от $y = 1$ до $y = e$.

1673. Найти длину правой ветви трактриссы

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right| \text{ от } y = a \text{ до } y = b \quad (0 < b < a).$$

1674. Найти длину замкнутой части кривой $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

1675. Найти длину кривой $y = \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{a} \right)$ от $x = a$ до $x = b$ ($0 < a < b$).

1676*. Найти длину дуги развертки окружности

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\cos t + t \sin t), \\ y &= a(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\} \text{ от } t = 0 \text{ до } t = T.$$

1677. Найти длину эволюты эллипса

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t; \quad y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

1678. Найти длину кривой

$$\left. \begin{aligned} x &= a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y &= a(2 \sin t - \sin 2t). \end{aligned} \right\}$$

1679. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

1680. Найти всю длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

1681. Найти длину дуги части параболы $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$, отсекаемой от параболы вертикальной прямой, проходящей через полюс.

1682. Найти длину гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $(2; \frac{1}{2})$ до точки $(\frac{1}{2}; 2)$.

1683. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$, находящейся внутри круга $r = a$.

1684. Найти длину дуги кривой $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$ от $r = 1$ до $r = 3$.

§ 9. Объемы тел

1°. Объем тела вращения. Объемы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, вокруг осей OX и OY выражаются соответственно формулами:

$$1) V_X = \pi \int_a^b y^2 dx; \quad 2) V_Y = 2\pi \int_a^b xy dx.$$

*) Тело образовано вращением около оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$. За элемент объема этого тела принимают объем части тела, образованного вращением около оси OY прямоугольника со сторонами y и dx , отстоящего от оси OY на расстоянии x . Тогда элемент объема $dV_Y = 2\pi xy dx$, откуда $V_Y = 2\pi \int_a^b xy dx$.