2762. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (3; 1), для которой отрезок касательной между точкой касания и осью OX делится пополам в точке пересечения с осью OY.

2763. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2; 0), если отрезок касательной к кривой между точкой касания и осью OY имеет постоянную длину 2.

Найти ортогональные траектории данных семейств кривых (a — параметр), построить семейства и их ортогональные траектории.

2764. $x^2+y^2=a^2$.

2765. $y^2=ax$.

2766. $xy=a$.

2767. $(x-a)^2+y^2=a^2$.

§ 4. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

1°. Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0 \tag{1}$$

называется *однородным*, если $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ — однородные функции одинакового измерения. Уравнение (1) может быть приведено к виду

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

и при помощи подстановки $y=xu$, где u — новая неизвестная функция, преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Можно также применять подстановку $x=yu$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$$

Решение. Полагаем $y=ux$; тогда $u+xu'=e^u+u$ или

$$e^{-u}du=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим $u=-\ln\ln\frac{C}{x}$, откуда

$$y=-x\ln\ln\frac{C}{x}.$$

2°. Уравнения, приводящиеся к однородным. Если

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{2}$$

и $\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, то, полагая в уравнении (2) $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, где постоянные α и β определяются из системы уравнений

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0, \quad a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0,$$

получим однородное дифференциальное уравнение относительно переменных u и v. Если $\delta=0$, то, полагая в уравнении (2) $a_1x+b_1y=u$, получим уравнение с разделяющимися переменными.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

2768. $y'=\frac{y}{x}-1$.

2769. $y'=-\frac{x+y}{x}$.

2770. $(x-y)\,y\,dx-x^2dy=0$.

2771. Для уравнения $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$ найти семейство интегральных кривых, а также выделить кривые, проходящие соответственно через точки (4; 0) и (1; 1).

2772. $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$.

2773. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}dx$.

2774. $(4x^2+3xy+y^2)\,dx+(4y^2+3xy+x^2)\,dy=0$.

2775. Найти частное решение уравнения $(x^2-3y^2)\,dx+2xy\,dy=0$ из условия, что при $x=2$ $y=1$.

Решить уравнения:

2776. $(2x-y+4)\,dy+(x-2y+5)\,dx=0$.

2777. $y'=\frac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

2778. $y'=\frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.

2779. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 0) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси OY, равен полярному радиусу точки касания.

2780.** Какую форму следует придать зеркалу прожектора, чтобы лучи от точечного источника света отразились параллельным пучком?

2781. Найти уравнение кривой, у которой подкасательная равна среднему арифметическому координат точки касания.

2782. Найти уравнение кривой, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью в любой точке кривой, равен расстоянию этой точки от начала координат.

2783*. Найти уравнение кривой, для которой площадь, заключенная между осью абсцисс, кривой и двумя ординатами, одна из которых постоянная, а другая — переменная, равна отношению куба переменной ординаты к соответствующей абсциссе.

2784. Найти кривую, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной, равен абсциссе точки касания.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли

1°. Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение вида

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x) \tag{1}$$

1-й степени относительно y и y' называется *линейным*.

Если функция $Q(x)\equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$y'+P(x)\cdot y=0 \tag{2}$$