и называется *однородным линейным* дифференциальным уравнением. В этом случае переменные разделяются и общее решение уравнения (2) получаем в виде

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{3}$$

Для решения неоднородного линейного уравнения (1) применяем так называемый метод *вариации произвольной постоянной*; этот метод состоит в том, что сначала находим общее решение соответствующего однородного линейного уравнения, т. е. соотношение (3). Затем, полагая в этом соотношении величину C функцией от x, ищем решение неоднородного уравнения (1) в виде (3). Для этого подставляем в уравнение (1) y и y', определяемые из (3) и из полученного дифференциального уравнения определяем функцию $C(x)$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (1) получаем в виде

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y + \cos x. \tag{4}$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение есть

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

Решая его, получим:

$$y = C \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Считая C функцией от x, дифференцируя, находим:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C.$$

Подставляя y и y' в уравнение (4), получим:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C = \operatorname{tg} x \cdot \frac{C}{\cos x} + \cos x, \text{ или } \frac{dC}{dx} = \cos^2 x,$$

откуда

$$C(x) = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Для решения линейного уравнения (1) можно также применить подстановку

$$y = uv, \tag{5}$$

где u и v — функции от x. Тогда уравнение (1) примет вид

$$[u' + P(x)u]\,v + v'u = Q(x). \tag{6}$$

Если потребовать, чтобы

$$u' + P(x)u = 0, \tag{7}$$

то из (7) найдем u, затем из (6) найдем v, а следовательно, из (5) найдем y.

2°. Уравнение Бернулли. Уравнение 1-го порядка вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-\alpha}$. Можно также непосредственно применять подстановку $y = uv$, или метод вариации произвольной постоянной.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

Решение. Это — уравнение Бернулли. Полагая

$$y = u \cdot v,$$

получим:

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}uv + x\sqrt{uv} \quad \text{или} \quad v\left(u' - \frac{4}{x}u\right) + v'u = x\sqrt{uv}.$$

Для определения функции u потребуем выполнения соотношения

$$u' - \frac{4}{x}u = 0$$

откуда

$$u = x^4.$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим:

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4},$$

отсюда находим v:

$$v = \left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2,$$

и, следовательно, общее решение получим в виде

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2.$$

Найти общие интегралы уравнений:

2785. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.$

2786. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3.$

2787*. $(1 + y^2)\,dx = (\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy)\,dy.$

2788. $y^2dx - (2xy + 3)\,dy = 0.$

Найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям:

2789. $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$ при $x = a$.

2790. $y' - \frac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0$; $y = 0$ при $x = 0$.

2791. $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; $y = 0$ при $x = 0$.