Найти общие решения уравнений:

2792. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$.

2793. $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$.

2794. $y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$.

2795. (Н.). $3x\,dy = y\,(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)\,dx$.

2796. Даны три частных решения y, y_1, y_2 линейного уравнения. Доказать, что выражение $\frac{y_2 - y}{y - y_1}$ сохраняет постоянное значение при любом x. Каков геометрический смысл этого результата?

2797. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью OX, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна.

2798. Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси абсцисс, равен квадрату ординаты точки касания.

2799. Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен поднормали.

2800. Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, пропорционален квадрату ординаты точки касания.

2801. Найти уравнение кривой, для которой отрезок касательной равен расстоянию точки пересечения этой касательной с осью OX от точки $M(0;\ a)$.

§ 6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

1°. Уравнения в полных дифференциалах. Если для дифференциального уравнения

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

выполнено равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение (1) может быть записано в виде $dU(x, y) = 0$ и называется *уравнением в полных дифференциалах*. Общий интеграл уравнения (1) есть $U(x, y) = C$. Функция $U(x, y)$ определяется способом, указанным в гл. VI, § 8, или по формуле

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy$$

(см. гл. VII, § 9).

Пример 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy$

Решение. Это — уравнение в полных дифференциалах, так как $\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2y + 4y^3)}{\partial x} = 12xy$ и, следовательно, уравнение имеет вид $dU = 0$.

Здесь

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$$

отсюда

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя U по y, найдем $\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$ (по условию); отсюда $\varphi'(y) = 4y^3$ и $\varphi(y) = y^4 + C_0$. Окончательно получим $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_0$, следовательно, $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ есть искомый общий интеграл уравнения.

2°. Интегрирующий множитель. Если левая часть уравнения (1) не является полным дифференциалом и выполнены условия теоремы Коши, то существует функция $\mu = \mu(x, y)$ *(интегрирующий множитель)* такая, что

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = dU. \tag{2}$$

Отсюда получаем, что функция μ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Интегрирующий множитель μ легко находится в двух случаях:

1) $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x)$, тогда $\mu = \mu(x)$;

2) $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F_1(y)$, тогда $\mu = \mu(y)$.

Пример 2. Решить уравнение $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

Решение. Здесь $P = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$, $Q = x^2 + y^2$ и $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1$, следовательно $\mu = \mu(x)$.

Так как $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ или $\mu\frac{\partial P}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{d\mu}{dx}$, то

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx = dx \quad \text{и} \quad \ln\mu = x,\ \mu = e^x.$$

Умножая уравнение на $\mu = e^x$, получим:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)\,dy = 0$$

— уравнение в полных дифференциалах. Проинтегрировав его, будем иметь общий интеграл

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$