2956. $y'''^2 = 4y''$.

2957. $yy'y'' = y'^3 + y''^2$. Выделить интегральную кривую, проходящую через точку (0; 0) и касающуюся в ней прямой $y + x = 0$.

2958. Найти кривые постоянного радиуса кривизны.

2959. Найти кривую, у которой радиус кривизны пропорционален кубу нормали.

2960. Найти кривую, у которой радиус кривизны равен нормали.

2961. Найти кривую, у которой радиус кривизны вдвое больше нормали.

2962. Найти кривые, у которых проекция радиуса кривизны на ось OY постоянна.

2963. Найти уравнение каната подвесного моста, предполагая, что нагрузка распределена равномерно по проекции каната на горизонтальную прямую. Весом каната пренебречь.

2964*. Найти положение равновесия гибкой нерастяжимой нити, укрепленной концами в двух точках и имеющей постоянную нагрузку q (включая вес нити) на единицу длины.

2965*. Тяжелое тело без начальной скорости скользит по наклонной плоскости. Найти закон движения, если угол наклона равен α, а коэффициент трения μ.

(Указание. Сила трения равна μN, где N — сила реакции плоскости.)

2966*. Силу сопротивления воздуха при падении тела можно считать пропорциональной квадрату скорости. Найти закон движения, если начальная скорость равна нулю.

2967*. Моторная лодка весом 300 *кГ* движется прямолинейно с начальной скоростью 66 *м/сек*. Сопротивление воды пропорционально скорости и равно 10 *кГ* при скорости 1 *м/сек*. Через сколько времени скорость будет равна 8 *м/сек*?

§ 11. Линейные дифференциальные уравнения

1°. Однородные уравнения. Функции $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x), \ldots$ $\ldots, y_n = \varphi_n(x)$ называются *линейно зависимыми*, если существуют постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, не все равные нулю, такие, что

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \equiv 0;$$

в противном случае данные функции называются *линейно независимыми*.

Общее решение *однородного линейного* дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\,y = 0 \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения (1) (*фундаментальная система решений*).

2°. Неоднородные уравнения. Общее решение *неоднородного линейного* дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\,y = f(x) \qquad (2)$$

с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ и правой частью $f(x)$ имеет вид

$$y = y_0 + Y,$$

где y_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения (1) и Y — частное решение данного неоднородного уравнения (2).

Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного уравнения (1), то общее решение соответствующего неоднородного уравнения (2) может быть найдено по формуле

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + \ldots + C_n(x)\,y_n,$$

где функции $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \ldots + C_n'(x)\,y_1 = 0, \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \ldots + C_n'(x)\,y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

(*метод вариации произвольных постоянных*).

Пример. Решить уравнение

$$xy'' + y' = x^2. \qquad (4)$$

Решение. Решая однородное уравнение

$$xy'' + y' = 0,$$

получим:

$$y = C_1 \ln x + C_2. \qquad (5)$$

Следовательно, можно принять

$$y_1 = \ln x \quad \text{и} \quad y_2 = 1$$

и решение уравнения (4) искать в виде

$$y = C_1(x) \ln x + C_2(x).$$

Составляя систему (3) и учитывая, что приведенный вид уравнения (4) есть $y'' + \frac{y'}{x} = x$, получим

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$$\begin{cases} C_1'(x) \ln x + C_2'(x)\,1 = 0, \\ C_1'(x)\,\dfrac{1}{x} + C_2'(x)\,0 = x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A \quad \text{и} \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + B$$

и, следовательно,

$$y = \frac{x^3}{9} + A \ln x + B,$$

где A и B — произвольные постоянные.