2968. Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

а) $x,\ x+1$; д) $x,\ x^2,\ x^3$;
б) $x^2, -2x^2$; е) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$;
в) $0,\ 1,\ x$; ж) $\sin x,\ \cos x,\ 1$;
г) $x,\ x+1,\ x+2$; з) $\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1$.

2969. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его фундаментальную систему решений:

а) $y_1=\sin x,\quad y_2=\cos x$;
б) $y_1=e^x,\quad y_2=xe^x$;
в) $y_1=x,\quad y_2=x^2$;
г) $y_1=e^x,\quad y_2=e^x\sin x,\ y_3=e^x\cos x$.

2970. Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y_1=x,\quad y_2=x^2,\quad y_3=x^3,$$

найти его частное решение y, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=1}=0,\quad y'|_{x=1}=-1,\quad y''|_{x=1}=2.$$

2971*. Решить уравнение

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0,$$

зная его частное решение $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

2972. Решить уравнение

$$x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0,$$

зная его частное решение $y_1=x$.

Методом вариации произвольных постоянных решить неоднородные линейные уравнения.

2973. $x^2y''-xy'=3x^3$.
2974*. $x^2y''+xy'-y=x^2$.
2975. $y'''+y'=\sec x$.

§ 12. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

1°. Однородное уравнение. Линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами p и q без правой части имеет вид

$$y''+py'+qy=0. \qquad (1)$$

Если k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$\varphi(k)\equiv k^2+pk+q=0, \qquad (2)$$

то общее решение уравнения (1) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, если k_1 и k_2 вещественны и $k_1\neq k_2$;
2) $y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$, если $k_1=k_2$;
3) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$, если $k_1=\alpha+\beta i$ и $k_2=\alpha-\beta i\ (\beta\neq 0)$.

2°. Неоднородное уравнение. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (3)$$

можно записать в виде суммы

$$y=y_0+Y,$$

где y_0 — общее решение соответствующего уравнения (1) без правой части, определяемое по формулам 1) — 3), и Y — частное решение данного уравнения (3).

Функция Y может быть найдена *методом неопределенных коэффициентов* в следующих простейших случаях:

1. $f(x)=e^{ax}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

Если a не является корнем характеристического уравнения (2), т. е. $\varphi(a)\neq 0$, то полагают $Y=e^{ax}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если a есть корень характеристического уравнения (2), т. е. $\varphi(a)=0$, то $Y=x^re^{ax}Q_n(x)$, где r — кратность корня a ($r=1$ или $r=2$).

2. $f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx]$.

Если $\varphi(a\pm bi)\neq 0$, то полагают

$$Y=e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx],$$

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ — многочлены степени $N=\max\{n, m\}$.

Если же $\varphi(a\pm bi)=0$, то

$$Y=x^re^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx],$$

где r — кратность корней $a\pm bi$ (для уравнений 2-го порядка $r=1$).

В общем случае для решения уравнения (3) применяется *метод вариации произвольных постоянных* (см. § 11).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $2y''-y'-y=4xe^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $2k^2-k-1=0$ имеет корни $k_1=1$ и $k_2=-\frac{1}{2}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения (первый вид) $y_0=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}$. Правая часть заданного уравнения $f(x)=4xe^{2x}=e^{ax}P_n(x)$. Следовательно, $Y=e^{2x}(Ax+B)$, так как $n=1$ и $r=0$. Дифференцируя Y два раза и подставляя производные в данное уравнение, получим:

$$2e^{2x}(4Ax+4B+4A)-e^{2x}(2Ax+2B+A)-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{2x}.$$

Сокращая на e^{2x} и приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены в левой и правой частях равенства, имеем $5A=4$ и $7A+5B=0$, откуда $A=\frac{4}{5}$ и $B=-\frac{28}{25}$.