Таким образом, $Y = e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)$, а общее решение данного уравнения

K-1
K=1

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет двукратный корень $k = 1$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = xe^x$; здесь $a = 1$ и $n = 1$. Частное решение $Y = x^2e^x(Ax + B)$, так как a совпадает с двукратным корнем $k = 1$ и, следовательно, $r = 2$.

Дифференцируя Y два раза, подставляя в уравнение и уравнивая коэффициенты, получим $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$. Следовательно, общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + y = x \sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = i$ и $k_2 = -i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения будет [см. 3), где $\alpha = 0$ и $\beta = 1$]:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Правая часть вида

$$f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx],$$

где $a = 0$, $b = 1$, $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = x$. Ей соответствует частное решение Y

$$Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$

(здесь $N = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $r = 1$).

Дифференцируя два раза и подставляя в уравнение, приравниваем коэффициенты в обеих частях равенства при $\cos x$, $x \cos x$, $\sin x$ и $x \sin x$. В результате получатся четыре уравнения $2A + 2D = 0$, $4C = 0$, $-2B + 2C = 0$, $-4A = 1$, из которых и определяются $A = -{}^1/_4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = {}^1/_4$. Поэтому $Y = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$.

Общее решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

3°. Принцип наложения решений. Если правая часть уравнения (3) есть сумма нескольких функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

и Y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ — соответствующие решения уравнений

$$y'' + py' + qy = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то сумма

$$y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

является решением уравнения (3).

Найти общие решения уравнений:

2976. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
2977. $y'' - 9y = 0$.
2978. $y'' - y' = 0$.
2979. $y'' + y = 0$.
2980. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
2981. $y'' + 4y' + 13y = 0$.
2982. $y'' + 2y' + y = 0$.
2983. $y'' - 4y' + 2y = 0$.
2984. $y'' + ky = 0$.
2985. $y = y'' + y'$.
2986. $\frac{y' - y}{y''} = 3$.

Найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям:

2987. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y = 5$, $y' = 8$ при $x = 0$
2988. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$.
2989. $y'' + 4y = 0$; $y = 0$, $y' = 2$ при $x = 0$.
2990. $y'' + 2y' = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.
2991. $y'' = \frac{y}{a^2}$; $y = a$, $y' = 0$ при $x = 0$.
2992. $y'' + 3y' = 0$; $y = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$ при $x = 3$.
2993. $y'' + \pi^2 y = 0$; $y = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$ при $x = 1$.

2994. Указать вид частных решений для данных неоднородных уравнений:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$;
б) $y'' + 9y = \cos 2x$;
в) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;
г) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$;
д) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$;
е) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$.

Найти общие решения уравнений:

2995. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.
2996. $y'' - y' + y = x^3 + 6$.
2997. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.
2998. $y'' - 8y' + 7y = 14$.
2999. $y'' - y = e^x$.
3000. $y'' + y = \cos x$.
3001. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$.
3002. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.
3003. $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$.
3004. $y'' + y' = \sin^2 x$.
3005. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

3006. Найти решение уравнения $y'' + 4y = \sin x$, удовлетворяющее условиям $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.