§ 13. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами порядка выше 2-го

1°. Однородное уравнение. Фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (1)$$

строится на основе характера корней *характеристического уравнения*

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0. \qquad (2)$$

А именно: 1) если k есть вещественный корень уравнения (2) кратности m, то ему соответствует m линейно независимых решений уравнения (1):

$$y_1=e^{kx},\ y_2=xe^{kx},\ \ldots,\ y_m=x^{m-1}e^{kx};$$

2) если $\alpha\pm\beta i$ — пара комплексных корней уравнения (2) кратности m, то ей соответствует $2m$ линейно независимых решений уравнения (1):

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots$$
$$\ldots,\ y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

2°. Неоднородное уравнение. Частное решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (3)$$

отыскивается на основе правил § 12, 2° и 3°.

Найти общие решения уравнений:

3045. $y'''-13y''+12y'=0.$

3046. $y'''-y'=0.$

3047. $y'''+y=0.$

3048. $y^{IV}-2y''=0.$

3049. $y'''-3y''+3y'-y=0.$

3050. $y^{IV}+4y=0.$

3051. $y^{IV}+8y''+16y=0.$

3052. $y^{IV}+y'=0.$

3053. $y^{IV}-2y''+y=0.$

3054. $y^{IV}-a^4y=0.$

3055. $y^{IV}-6y''+9y=0.$

3056. $y^{IV}+a^2y''=0.$

3057. $y^{IV}+2y'''+y''=0.$

3058. $y^{IV}+2y''+y=0.$

3059. $y^{(n)}+\frac{n}{1}y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)}+\ldots+\frac{n}{1}y'+y=0.$

3060. $y^{IV}-2y'''+y''=e^x.$

3061. $y^{IV}-2y'''+y''=x^3.$

3062. $y'''-y=x^3-1.$

3063. $y^{IV}+y'''=\cos 4x.$

3064. $y'''+y''=x^2+1+3xe^x.$

3065. $y'''+y''+y'+y=xe^x.$

3066. $y'''+y'=\operatorname{tg}x\sec x.$

3067. Найти частное решение уравнения

$$y'''+2y''+2y'+y=x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

§ 14. Уравнения Эйлера

Линейное уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)}+A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+A_{n-1}(ax+b)y+A_ny=f(x), \qquad (1)$$

где $a, b, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ — постоянные, называется *уравнением Эйлера*.

Вводим новую независимую переменную t, полагая:

$$ax+b=e^t.$$

Тогда

$$y'=ae^{-t}\frac{dy}{dt},\quad y''=a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$
$$y'''=a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right) \text{ и т. д.}$$

и уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Решить уравнение $x^2y''+xy'+y=1.$

Решение. Полагая $x=e^t$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

Следовательно, данное уравнение примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=1,$$

откуда

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t+1$$

или

$$y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+1.$$

Для однородного уравнения Эйлера

$$x^ny^{(n)}+A_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+A_{n-1}xy'+A_ny=0 \qquad (2)$$

решение можно искать в виде

$$y=x^k. \qquad (3)$$

Подставляя в (2) $y, y', \ldots, y^{(n)}$, определяемые из соотношения (3), получим характеристическое уравнение, из которого можно найти показатель k.

Если k — действительный корень характеристического уравнения кратности m, то ему соответствуют m линейно независимых решений

$$y_1=x^k,\ y_2=x^k\cdot\ln x,\ y_3=x^k(\ln x)^2,\ \ldots,\ y_m=x^k(\ln x)^{m-1}.$$

Если $\alpha\pm\beta i$ — пара комплексных корней кратности m, то ей соответствует $2m$ линейно независимых решений

$$y_1=x^\alpha\cos(\beta\ln x),\ y_2=x^\alpha\sin(\beta\ln x),\ y_3=x^\alpha\ln x\cos(\beta\ln x),$$
$$y_4=x^\alpha\ln x\cdot\sin(\beta\ln x),\ \ldots,\ y_{2m-1}=x^\alpha(\ln x)^{m-1}\cos(\beta\ln x),$$
$$y_{2m}=x^\alpha(\ln x)^{m-1}\sin(\beta\ln x).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2y''-3xy'+4y=0.$$

Решение. Полагаем

$$y=x^k;\quad y'=kx^{k-1},\quad y''=k(k-1)x^{k-2}.$$