

Решить уравнения:

3007. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = A \sin pt$. Рассмотреть случаи: 1) $p \neq \omega$;
2) $p = \omega$.

3008. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$.

3009. $y'' - 2y' = x^2 - 1$.

3010. $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

3011. $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$.

3012. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x$.

3013. $y'' + y' = 5x + 2e^x$.

3014. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$.

3015. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$.

3016. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.

3017. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.

3018. $y'' - 3y' = x + \cos x$.

3019. Найти решение уравнения $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$, удовлетворяющее условиям $y = \frac{1}{8}$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Решить уравнения:

3020. $y'' - y = 2x \sin x$.

3021. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$.

3022. $y'' + 4y = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x + 1$.

3023. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$.

3024. $y'' = xe^x + y$.

3025. $y'' + 9y = 2x \sin x + xe^{3x}$.

3026. $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x})$.

3027. $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$.

3028. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

3029. $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x$.

3030*. $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$.

3031. $y'' - 2y = 2xe^x (\cos x - \sin x)$.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения:

3032. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

3036. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

3033. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

3037. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

3034. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

3038. а) $y'' - y = \operatorname{th} x$;

3035. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

б) $y'' - 2y = 4x^3 e^{x^2}$.

3039. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти уравнение движения, которое будет совершать один из этих грузов, если другой оборвется.

Решение. Пусть увеличение длины пружины под действием одного груза в состоянии покоя равно a и масса груза m . Обозначим через x координату груза, отсчитываемую по вертикали от положения равновесия при наличии одного груза. Тогда

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + a),$$

где, очевидно, $k = \frac{mg}{a}$ и, следовательно, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x$. Общее решение есть $x = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{a}}t$. Начальные условия дают $x = a$ и $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$; отсюда $C_1 = a$ и $C_2 = 0$, следовательно,

$$x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t.$$

3040*. Сила, натягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 1 кг , когда длина увеличивается на 1 см . К пружине подвешен груз весом 2 кг . Найти период колебательного движения, которое получит этот груз, если его слегка оттянуть книзу и затем отпустить.

3041*. Груз весом $P = 4 \text{ кг}$ подвешен на пружине и увеличивает ее длину на 1 см . Найти закон движения груза, если верхний конец пружины совершает вертикальное гармоническое колебание $y = 2 \sin 30t \text{ см}$ и в начальный момент груз находился в покое (сопротивлением среды пренебрегаем).

3042. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности равен k). Найти закон движения точки, зная, что расстояние между центрами $2b$, в начальный момент точка находилась на отрезке, соединяющем центры, на расстоянии c от середины его, и имела скорость, равную нулю.

3043. Цепь длины 6 м скользит вниз с подставки без трения. Если движение начинается с момента, когда свисает 1 м цепи, то во сколько времени соскользнет вся цепь?

3044*. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω около перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шарика относительно трубки, считая, что

а) в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения; начальная скорость шарика равна нулю;

б) в начальный момент шарик находился на оси вращения и имел начальную скорость v_0 .