Подставляя в данное уравнение, после сокращения на x^k получим характеристическое уравнение

$$k^2-4k+4=0.$$

Решая его, находим:

$$k_1=k_2=2,$$

следовательно, общее решение будет:

$$y=C_1x^2+C_2x^2\ln x.$$

Решить уравнения:

3068. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0.$

3069. $x^2y''-xy'-3y=0.$

3070. $x^2y''+xy'+4y=0.$

3071. $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0.$

3072. $(3x+2)y''+7y'=0.$

3073. $y''=\dfrac{2y}{x^2}.$

3074. $y''+\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=0.$

3075. $x^2y''-4xy'+6y=x.$

3076. $(1+x)^2y''-3(1+x)y'+4y=(1+x)^3.$

3077. Найти частное решение уравнения

$$x^2y''-xy'+y=2x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y=0$, $y'=1$ при $x=1$.

§ 15. Системы дифференциальных уравнений

Метод исключения. Для нахождения решения, например, нормальной системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка, т. е. системы вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y,\ z),\qquad \frac{dz}{dx}=g(x,\ y,\ z), \tag{1}$$

разрешенной относительно производных от искомых функций, дифференцируем по x одно из них. Имеем, например:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f+\frac{\partial f}{\partial z}g. \tag{2}$$

Определяя z из первого уравнения системы (1) и подставляя найденное значение

$$z=\varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{3}$$

в уравнение (2), получим уравнение 2-го порядка с одной неизвестной функцией y. Решая его, находим:

$$y=\psi(x,\ C_1,\ C_2), \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя функцию (4) в формулу (3), определяем функцию z без новых интеграций. Совокупность формул (3) и (4), где y заменено на ψ, дает *общее решение системы* (1).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y+4z=1+4x,\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}+y-z=\dfrac{3}{2}x^2.\end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}=4.$$

Из первого уравнения определяется $z=\dfrac{1}{4}\left(1+4x-\dfrac{dy}{dx}-2y\right)$ и тогда из второго будем иметь: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{3}{2}x^2+x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{4}\dfrac{dy}{dx}$. Подставляя z и $\dfrac{dz}{dx}$ в уравнение, полученное после дифференцирования, приходим к уравнению 2-го порядка с одной неизвестной y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=-6x^2-4x+3.$$

Решая его, найдем:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x,$$

и тогда

$$z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)=-C_1e^{2x}+\frac{C_2}{4}e^{-3x}-\frac{1}{2}x^2.$$

Аналогично можно поступать и в случае системы с большим числом уравнений.

Решить системы:

3078. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z,\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=-y.\end{cases}$

3079. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y+5z,\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}+y+3z=0.\end{cases}$

3080. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-3y-z,\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=y-z.\end{cases}$

3081. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=z,\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=x.\end{cases}$

3082. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+z,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+z,\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=x+y.\end{cases}$