3083. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y+z, \\ \dfrac{dz}{dx}=x+y+z. \end{cases}$

3084. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+z=\sin x, \\ \dfrac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x. \end{cases}$

3085. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+3y+4z=2x, \\ \dfrac{dz}{dx}-y-z=x, \end{cases}$

$y=0, \quad z=0 \quad$ при $x=0$.

3086. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-4x-y+36t=0, \\ \dfrac{dy}{dt}+2x-y+2e^t=0, \end{cases}$

$x=0, \quad y=1 \quad$ при $t=0$.

3087. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2}y. \end{cases}$

3088*. а) $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2}=\dfrac{dy}{2y^3}=\dfrac{dz}{2y^2z}$;

б) $\dfrac{dx}{x-y}=\dfrac{dy}{x+y}=\dfrac{dz}{z}$;

в) $\dfrac{dx}{y-z}=\dfrac{dy}{z-x}=\dfrac{dz}{x-y}$,

выделить интегральную кривую, проходящую через точку (1; 1; —2).

3089. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+z=1, \\ \dfrac{dz}{dx}+\dfrac{2}{x^2}y=\ln x. \end{cases}$

3090. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+2y+4z=e^x, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2}-y-3z=-x. \end{cases}$

3091.** Снаряд вылетает из орудия с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти уравнение движения, принимая сопротивление воздуха пропорциональным скорости.

3092*. Материальная точка притягивается центром O с силой, пропорциональной расстоянию. Движение начинается из точки A на расстоянии a от центра с начальной скоростью v_0, перпендикулярной к отрезку OA. Найти траекторию.

§ 16. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Если интегрирование дифференциального уравнения при помощи элементарных функций не удается, то его решение в некоторых случаях можно искать в виде степенного ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n. \tag{1}$$

Неопределенные коэффициенты $c_n (n=1, 2, \ldots)$ находятся путем подстановки ряда (1) в уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях бинома $x-x_0$ в левой и правой частях полученного равенства.

Можно также искать решение уравнения

$$y'=f(x, y); \; y(x_0)=y_0 \tag{2}$$

в форме ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{3}$$

где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0, y_0)$ и дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n=2, 3, \ldots)$ последовательно находятся при помощи дифференцирования уравнения (2) и подстановки вместо x числа x_0.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y''-xy=0,$$

если $y=y_0$, $y'=y'_0$ при $x=0$.

Решение. Полагаем

$$y=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots,$$

откуда, дифференцируя, получим:

$$y''=2\cdot 1c_2+3\cdot 2c_3x+\ldots+n(n-1)c_nx^{n-2}+(n+1)nc_{n+1}x^{n-1}+ \\ +(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\ldots$$

Подставляя y и y'' в данное уравнение, приходим к тождеству

$$[2\cdot 1c_2+3\cdot 2c_3x+\ldots+n(n-1)c_nx^{n-2}+(n+1)nc_{n+1}x^{n-1}+ \\ +(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\ldots]-x[c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots]\equiv 0.$$

Собирая в левой части полученного равенства члены с одинаковыми степенями x и приравнивая нулю коэффициенты при этих степенях, будем иметь:

$$c_2=0; \quad 3\cdot 2c_3-c_0=0, \; c_3=\frac{c_0}{3\cdot 2}; \quad 4\cdot 3c_4-c_1=0, \; c_4=\frac{c_1}{4\cdot 3}; \quad 5\cdot 4c_5-c_2=0,$$

$$c_5=\frac{c_2}{5\cdot 4} \text{ и т. д.}$$

Вообще,

$$c_{3k}=\frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3k-1)3k}, \qquad c_{3k+1}=\frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3k(3k+1)},$$

$$c_{3k+2}=0 \quad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Следовательно,

$$y=c_0\left(1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3k-1)3k}+\ldots\right)+ \\ +c_1\left(x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3k(3k+1)}+\ldots\right), \tag{4}$$

где $c_0=y_0$ и $c_1=y'_0$.

Применяя признак Даламбера, легко убедиться, что ряд (4) сходится при $-\infty < x < +\infty$.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$y'=x+y; \; y_0=y(0)=1.$$

Решение. Полагаем

$$y=y_0+y'_0x+\frac{y''_0}{2!}x^2+\frac{y'''_0}{3!}x^3+\ldots$$