

**Вопросы для подготовки к экзамену по математическому анализу  
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, ПС, РТ  
(экзамен 2023-24 уч.г.)\***

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности. [Л. 4]
2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности. [Л. 4]
3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел. [Л. 5]
4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела. [Л. 5]
5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве. [Л. 5]
6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции. [Л. 5]
7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций. [Л. 6]
8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции. [Л. 6]
9. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . [Л. 6]
10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. [Л. 7]
11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную. [Л. 7]
12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой. [Л. 7]
13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. [Л. 8]
14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых. [Л. 8]
15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков. [Л. 8]
16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. [Л. 9]
17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции. [Л. 9]
18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. [Л. 9]
19. Дайте определение функции, непрерывной в точке. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функций  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ . [Л. 9]
20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке. [Л. 10]
21. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. На каждый случай приведите примеры. [Л. 9]
22. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты. [Л. 10]
23. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке. [Л. 11]
24. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции. [Л. 11]
25. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций. [Л. 11]
26. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций. [Л. 11]

---

\*В квадратных скобках после текста вопроса указаны номера лекций согласно календарному плану учебного курса (см. также Иванков П.Л. Конспект лекций по математическому анализу // электронный ресурс <http://fn.bmstu.ru/educational-work-fs-12/lecture-notes-fs-12>).

27. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции. [Л. 11]
28. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции. [Л. 11]
29. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка. [Л. 12]
30. Сформулируйте и докажите теорему Ферма. [Л. 13]
31. Сформулируйте и докажите теорему Ролля. [Л. 13]
32. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. [Л. 13]
33. Сформулируйте и докажите теорему Коши. [Л. 13]
34. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций. [Л. 13]
35. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности. [Л. 13]
36. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
37. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. [Л. 14]
38. Выведите формулу Маклорена для функции  $y = e^x$  с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
39. Выведите формулу Маклорена для функции  $y = \sin x$  с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
40. Выведите формулу Маклорена для функции  $y = \cos x$  с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
41. Выведите формулу Маклорена для функции  $y = \ln(1 + x)$  с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
42. Выведите формулу Маклорена для функции  $y = (1 + x)^\alpha$  с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]
43. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции. [Л. 15]
44. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции. [Л. 15]
45. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной). [Л. 15]
46. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной). [Л. 15]
47. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции. [Л. 16]
48. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба. [Л. 16]
49. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба. [Л. 16]

**При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий, в частности:** предела последовательности [Л. 4]; предела функции (определения по Коши и по Гейне) [Л. 5]; окрестности и  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x \in \mathbb{R}$  [Л. 2]; окрестностей  $+\infty$ ,  $-\infty$  и  $\infty$  [Л. 2]; сходящейся, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей, монотонной, фундаментальной последовательностей [Л. 3, 4]; бесконечно малой и бесконечно большой функций [Л. 7]; бесконечно малых одного порядка, несравнимых, эквивалентных [Л. 8]; порядка малости и роста функции [Л. 8] приращения функции [Л. 9]; функции, непрерывной в точке, на интервале, на отрезке [Л. 9]; точек разрыва: устранимого, I-го рода, II-го рода [Л. 9]; асимптоты [Л. 10]; производной функции в точке [Л. 11]; односторонней производной функции [Л. 11]; дифференцируемой функции [Л. 11]; дифференциала первого порядка [Л. 12]; производной и дифференциала  $n$ -го порядка [Л. 12] возрастающей, невозрастающей, убывающей, неубывающей, монотонной, строго монотонной функций [Л. 15]; строгого и нестрогого локальных минимума, максимума, экстремума [Л. 15]; стационарной и критической точек [Л. 15]; выпуклости (вверх или вниз) графика функции на промежутке [Л. 16]; точки перегиба графика функции [Л. 16].

## Задачи для подготовки к экзамену

При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

1. Вычислить предел:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos n}{2n} + \frac{5n}{3n+7} \right). \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right). \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{2-x}}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}. \quad 1.5. \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \sin \frac{x-\alpha}{2}. \quad 1.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}{x^3}.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}. \quad 1.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad 1.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-7)(\ln(3x+5) - \ln(3x-1)).$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{e^{3x}-1}}. \quad 1.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^7 + 4x^4 + 1}{(x-2)^3(4x+5)^2(3x-1)^2}.$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x^4 + x^2) + e^{x^2} - \cos 2x}{\ln(1+2x^2)}. \quad 1.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 7x^2 + \cos 5x + \operatorname{arctg} x^5 + e^{-x^2}}{\sqrt{x^4 + 8x^3}}.$$

2. Выделить главную часть бесконечно малой или бесконечно большой функции:

$$2.1. f(x) = \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) \text{ при } x \rightarrow 0. \quad 2.2. f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$2.3. f(x) = \sqrt{\lg x} \text{ при } x \rightarrow 1. \quad 2.4. f(x) = (2x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x+3}} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

3. Определить порядок малости  $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$  относительно  $\beta(x) = x$  при  $x \rightarrow 0$ .

4. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер:

$$4.1. f(x) = 2^{\frac{x}{9-x^2}}. \quad 4.2. f(x) = \frac{5^{1/x} - 1}{5^{1/x} + 1}. \quad 4.3. f(x) = (2+x) \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{(2-x)(1-x^2)}.$$

$$4.4. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x < 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\pi-x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad 4.5. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}, & x < 1; \\ 2^{1/x}, & 1 \leq x < 2; \\ \sqrt{2}, & x \geq 2. \end{cases}$$

5. Найти угол под которым пересекаются параболы  $y = (x-2)^2$  и  $y = -x^2 + 6x - 4$ .

6. Составить уравнение касательной к линии  $y = x^2 + 4x$ , которая параллельна прямой  $y - 2x = 0$ .

7. Найти точки, в которых нормаль к кривой  $x^2 - 2x + y^2 = 0$  параллельна оси  $OY$ .

8. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталья — Бернулли:

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}. \quad 8.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{1/x}. \quad 8.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

9. Используя разложения функций по формуле Маклорена, вычислить предел:

$$9.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cdot \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}. \quad 9.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - 4e^{-x^2/2} + 4}{x^3(e^x - 1)}. \quad 9.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{(3^x - 1)^3}.$$

10. Функцию  $f(x)$  разложить по целым степеням  $x$  с остаточным членом в форме Пеано, ограничиваясь членами до пятого порядка малости относительно  $x$ :

10.1.  $f(x) = e^{x^2-1}$ .    10.2.  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .    10.3.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1-x}$ .

10.4.  $f(x) = \ln \frac{3+x}{1-x^2}$ .    10.5.  $f(x) = x\sqrt[3]{8-x^2}$ .    10.6.  $f(x) = x\sqrt{1-x^2} - \cos x \cdot \ln(1+x)$ .

11. Разложить многочлен  $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 4$  по степеням  $x - 2$ .

12. Найти асимптоты, точки экстремума, интервалы монотонности функции  $y = \sqrt[3]{12x - 4x^3}$ . Построить график функции в окрестности точек экстремума и асимптот.

13. Найти интервалы выпуклости графика функции  $y = x - \operatorname{arctg} 5x$  и точки перегиба.

14. Построить график функции  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ , определить асимптоты, точки экстремума, интервалы возрастания и убывания, направление выпуклости графика функции и точки перегиба.

### Образец билета

---

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

---

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 0.

по курсу Математического анализа, 1-й сем., ИУ (кроме ИУ9), РЛ, ПС, РТ

1. (6 баллов) Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела.
2. (6 баллов) Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции.
3. (6 баллов) Задача из комплекта 1.
4. (6 баллов) Задача из комплекта 5.
5. (6 баллов) Дополнительные вопросы экзаменатора.

---

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 22.11.2021.

---