б) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если условие а) выполнено, то условия б) и в) эквивалентны следующему:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0,\ \Delta x)=0,$$

где

$$\Delta f(x_0;\ \Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

— *приращение функции* $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующее *приращению аргумента* $\Delta x=x-x_0$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий а)—в), то x_0 называется точкой разрыва функции $y=f(x)$. При этом различают следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0 или нарушено условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. В этом случае x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции.

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует. Если при этом существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (очевидно, не равные друг другу), то x_0 называется *точкой разрыва* 1-*го рода*.

в) В остальных случаях x_0 называется *точкой разрыва* 2-*го рода*.

1.378. Используя логическую символику, записать на языке «ε-δ» следующие утверждения:

а) функция $y=f(x)$ с областью определения D непрерывна в точке $x_0\in D$;

б) функция $y=f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0\in D$.

Доказать, что следующие функции непрерывны в каждой точке их естественной области определения:

1.379. $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$.

◄ Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$\Delta f(x_0,\ \Delta x)=(x_0+\Delta x)^n-x_0^n=C_n^1x_0^{n-1}\Delta x+C_n^2x_0^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n$.

Отсюда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0,\ \Delta x)=0$. ►

1.380. $f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$.

1.381. $f(x)=\log_a x$; $a>0$, $a\neq 1$.

1.382. $f(x)=\sin x$. **1.383.** $f(x)=\arcsin x$.

Задана функция $f(x)$. При каком выборе параметров, входящих в ее определение, $f(x)$ будет непрерывной?

1.384. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x\neq 1,\\ A, & x=1.\end{cases}$

1.385. $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ ax^2-2, & x>1.\end{cases}$

1.386. $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\leqslant\pi/2,\\ \sin x+b, & x>\pi/2.\end{cases}$

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»:

1.387. $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$. **1.388.** $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$.

1.389. $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $n\in\mathbb{N}$. **1.390.** $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$.

1.391. $f(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$. **1.392.** $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$.

1.393. $f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. **1.394.** $f(x)=\dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

1.395. $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x-2}}-1}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$. **1.396.** $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

1.397. $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$. **1.398.** $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

1.399. $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1\leqslant x<1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 4,\\ 1, & x=1.\end{cases}$

1.400. $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$.

1.401. $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 4-2x, & 1<x<2{,}5,\\ 2x-7, & 2{,}5\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

1.402. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi/2\leqslant x<\pi/4,\\ 1, & x=\pi/4,\\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \pi/4<x\leqslant\pi.\end{cases}$

1.403. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва 1-го рода.

4. Непрерывность на множестве. Равномерная непрерывность. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке $x\in D$. Она называется *равномерно непрерывной на множестве* D, если для любого $\varepsilon>0$ существует число