4. $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования функций

I. Пусть C — постоянная и $f(x)$, $g(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда:

1. $(C)' = 0$. 4. $(fg)' = f'g + fg'$.

2. $(f+g)' = f' + g'$. 5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$.

3. $(Cf)' = Cf'$.

II. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = g(f(x))$ в точке x_0 имеет производную, равную

$$z'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0) \tag{2}$$

(*правило дифференцирования сложной функции*).

Пример 2. Найти производную функции $z = \log_3(\arcsin x)$.

◀ Полагая $z = \log_3 y$ и $y = \arcsin x$, имеем

$$z'(y) = \log_3 e \cdot \frac{1}{y} \quad \text{и} \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда, согласно (2), получаем

$$z'(x) = \frac{\log_3 e}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$ ▶

Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$, если:

5.1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

5.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}25$.

5.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 100$, $\Delta x = -90$.

Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$ как функцию Δx, если:

5.4. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi/2$.

◀ Имеем

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{2}, \Delta x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right) = -2\sin^2\frac{\Delta x}{2}.$$ ▶

5.5. $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$. 5.6. $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$.

5.7. $f(x) = \log_2 x$, $x_0 = 1$.

Пользуясь только определением производной, найти $f'(x)$:

5.8. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

◀ Имеем:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(-\Delta x)}{\Delta x \sin x \sin(x+\Delta x)} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sin x \sin(x+\Delta x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$ ▶

5.9. $f(x) = 1/x^2$. 5.10. $f(x) = \sqrt{x}$.

5.11. $f(x) = 2^x$. 5.12. $f(x) = \log_2 x$.

5.13. Известно, что $f(0) = 0$ и существует предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. Доказать, что этот предел равен $f'(0)$.

5.14*. Доказать, что если $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Для заданной $f(x)$ найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$:

5.15. $f(x) = |x-1| + |x+1|$, $x_0 = \pm 1$.

5.16. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1, \\ -x^2 + 2x, & x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

◀ Имеем

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

и

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x-1} = -\lim_{x \to 1+0} (x-1) = 0.$$ ▶

5.17. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^2 \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

5.18. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$, $x_0 = 0$.

5.19. $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

5.20*. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$