непрерывна при $x=0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

Найти производные следующих функций:

5.21. $y=3-2x+\frac{2}{3}x^4$. 5.22. $y=-\frac{5x^5}{a^2}$.

5.23. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$. 5.24. $y=\frac{x-1}{x+1}$.

5.25. $y=\frac{x^2+1}{x^3-x}$. 5.26. $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2+9)$.

5.27. $y=\frac{1+3x^2}{\sqrt{2\pi}}$. 5.28. $y=\frac{1}{x^3+3x-1}$.

5.29. $y=\frac{a}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{b}$. 5.30. $y=\frac{a+bx}{c+dx}$.

5.31. $y=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}$. 5.32. $y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

5.33. $y=(\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)$. 5.34. $y=3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[4]{x^3}$.

5.35. $y=(3\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^4}$. 5.36. $y=\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

5.37. $y=x^3\operatorname{ctg}x$. 5.38. $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

5.39. $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$. 5.40. $y=\sqrt{x}\sin x$.

5.41. $y=x\sqrt[3]{x^2}(2\ln x-3^x)$. 5.42. $y=3x^3\log_2 x+\frac{x^2}{e^x}$.

5.43. $y=2\sin x-3\operatorname{tg}x$. 5.44. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

5.45. $y=x^{3/2}\sqrt[3]{x^5+a}$. 5.46. $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

5.47. $y=\sin\frac{3x}{2}$. 5.48. $y=6\cos\frac{2x}{3}$.

5.49. $y=(1+4x^2)^3$. 5.50. $y=\sqrt[4]{(1+3x^2)^3}$.

5.51. $y=\sin^2\frac{x}{2}$. 5.52. $y=\sqrt{1+\sin 4x}-\sqrt{1-\sin 4x}$.

5.53. $y=x\arcsin\ln x$. 5.54. $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

5.55. $y=\sqrt[4]{(1+\sin^2 x)^3}$. 5.56. $y=x^2e^{-2x}$.

5.57. $y=e^{x/3}\cos^2\frac{x}{3}$.

5.58. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a})$.

5.59. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. 5.60. $y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

5.61. $y=\sqrt{\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}}$. 5.62. $y=\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

5.63. $y=\cos^2\left(\sin\frac{x}{3}\right)$. 5.64. $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

5.65. $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$.

5.66. $y=\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$.

5.67. $y=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$. 5.68. $y=\frac{e^{-x^2}}{2x}$.

5.69. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$. 5.70. $y=2^{\sqrt{\sin^2 x}}$.

5.71. $y=3^{2^x}$. 5.72. $y=\ln x\cdot\lg x-\ln a\cdot\log_a x$.

5.73. $y=\log_2\ln 2x$. 5.74. $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

5.75. $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$. 5.76. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

Найти производные *гиперболических функций*:

5.77. $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (*гиперболический синус*),

5.78. $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (*гиперболический косинус*),

5.79. $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ (*гиперболический тангенс*),

5.80. $\operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$ (*гиперболический котангенс*).

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}.$$

Применение предварительного логарифмирования часто упрощает вычисление производной.

Пример 3. Найти производную функции $y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

◄ Так как функция определена при $x\in[0,1]\cup(2,+\infty)$, то

$$\ln y=\frac{1}{2}(\ln x+\ln|x-1|-\ln|x-2|).$$

Отсюда (см. пример 5.117)

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right),$$

т. е.

$$y'=(\ln y)'\cdot y=\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}. \ ►$$

Пример 4. Найти производную *сложно-показательной* функции $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.