5.144. Найти значение y'_x в точке $x=1$, если

$$x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0,\ y(1)=1.$$

5.145. Найти y'_x в точке $(0, 1)$, если $e^y+xy=e$.

Найти y'_x для следующих функций, заданных неявно:

5.146. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 5.147. $x^4+y^4=x^2y^2$.

5.148. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $a>0$. 5.149. $2y\ln y=x$.

5.150. $e^x\sin y-e^y\cos x=0$. 5.151. $\sin(xy)+\cos(xy)=0$.

5.152. $2^x+2^y=2^{x+y}$. 5.153. $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

5.154. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. 5.155. $xy=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

5.156. $x^y=y^x$. 5.157. $a^{\frac{x}{y}}=\left(\frac{x}{y}\right)^a$.

5.158. Доказать, что функция y, определенная уравнением $xy-\ln y=1$, удовлетворяет также уравнению $y^2+(xy-1)y'=0$.

Найти производные функций, обратных к заданным:

5.159. $y=\operatorname{sh}x$.

◀ Имеем по определению $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Так как $(\operatorname{sh}x)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ для всех $x\in\mathbb{R}$, то функция $\operatorname{sh}x$ монотонно возрастает на всей действительной оси и, следовательно, имеет обратную, обозначаемую $\operatorname{arsh}x$. По правилу дифференцирования обратной функции получаем

$$x'_y=(\operatorname{arsh}y)'=\frac{1}{y'_x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{\operatorname{ch}x}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Следовательно, переходя к обычным обозначениям, имеем

$$(\operatorname{arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\ ▶$$

5.160*. $y=\operatorname{ch}x$. 5.161. $y=\arcsin 2^x$.

5.162. $y=2x^2-x$, $x\in(1/2, +\infty)$.

Пусть $y=\alpha(x)$ — функция, обратная к заданной $y=f(x)$. Выразить $\alpha'(x)$ через x и $\alpha(x)$, если:

5.163. $y=x^x$.

◀ Учитывая, что

$$(x^x)'=x^x(\ln x+1),$$

получаем:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{x^x(\ln x+1)}=\frac{1}{y(\ln\alpha(y)+1)},$$

так как $x=\alpha(y)$. В обычных обозначениях

$$\alpha'(x)=\frac{1}{x(\ln\alpha(x)+1)}.\ ▶$$

5.164. $y=x+e^x$. 5.165. $y=\frac{1}{2}x+x^3$.

5.166. $y=x+\log_2 x$. 5.167. $y=x\ln x$.

Пусть заданы функции

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t);\quad t\in(\alpha,\beta). \tag{6}$$

Если при этом $x=\varphi(t)$ на интервале (α,β) имеет обратную $t=\varphi^{-1}(x)$, то определена новая функция

$$y(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)), \tag{7}$$

называемая функцией, *заданной параметрически* соотношениями (6). Дифференцируя (7) по x и используя правило дифференцирования обратной функции (пример 6), получаем

$$y'_x=\psi'_t\cdot t'_x=\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

Пример 7. Найти y'_x, если

$$x=\cos^2 t,\quad y=\sin t,\quad t\in(0, \pi/2).$$

◀ Так как $\varphi'_t=-2\cos t\sin t$, $\psi'_t=\cos t$, то по формуле (8) находим

$$y'_x=-\frac{1}{2\sin t}.\ ▶$$

Для функций, заданных параметрически, найти y'_x:

5.168. $x=2t$, $y=3t^2-5t$, $t\in(-\infty, +\infty)$.

5.169. $x=t^3+2$, $y=0{,}5t^2$, $t\in(-\infty, +\infty)$.

5.170. $x=\frac{1}{t+1}$, $y=\left(\frac{t}{t+1}\right)^2$, $t\neq-1$.

5.171. $x=2^{-t}$, $y=2^{2t}$, $t\in(-\infty, +\infty)$.

5.172. $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, $\varphi\in(0, \pi)$.

5.173. $x=\operatorname{tg}t$, $y=\sin 2t+2\cos 2t$, $t\in(-\pi/2, \pi/2)$.

5.174. $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $t\in(0, +\infty)$.

5.175. $x=\ln(1+t^2)$, $y=t-\operatorname{arctg}t$, $t\in(0, +\infty)$.

5.176. $x=3\log_2\operatorname{ctg}t$, $y=\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t$, $t\in(0, \pi/2)$.

5.177. $x=\arcsin(t^2-1)$, $y=\arccos\frac{t}{2}$, $t\in(0, \sqrt{2})$.

5.178. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$, $t\in(1, +\infty)$.

5.179. $x=a\operatorname{sh}t$, $y=b\operatorname{ch}t$, $t\in(0, +\infty)$.