Найти y'_x в указанных точках:

5.180. $x=t\ln t,\ y=\frac{\ln t}{t},\ t=1.$

5.181. $\begin{matrix} x=t\,(t\cos t-2\sin t), \\ y=t\,(t\sin t+2\cos t), \end{matrix}\quad t=\pi/4.$

5.182. $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ t=\pi/6.$

5.183. $x=\frac{3at}{1+t^2},\ y=\frac{3at^2}{1+t^2},\ t=2.$

3. Производные высших порядков. *Производной 2-го порядка* от функции $y=f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е.

$$y''(x)=(y'(x))'.$$

Вообще *производной n-го порядка* (или *n-й производной*) называется производная от производной порядка $(n-1)$, т. е.

$$y^{(n)}(x)=(y^{(n-1)}(x))',\quad n=2,\ 3,\ \ldots$$

Для производной n-го порядка используется также обозначение $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Пример 8. Найти y'', если $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

◀ Имеем $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Следовательно,

$$y''=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.\ ▶$$

Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

5.184. $y=\cos^2 x$. **5.185.** $y=\operatorname{arctg} x^2$.

5.186. $y=\log_2\sqrt[3]{1-x^2}$. **5.187.** $y=e^{-x^2}$.

5.188. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **5.189*.** $y=x^{\sqrt{x}}$.

5.190. Найти $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, если $y(x)=e^{2x}\sin 3x$.

5.191. Найти $y'''(2)$, если $y=\ln(x-1)$.

5.192. Найти $y^{\mathrm{IV}}(1)$, если $y=x^3\ln x$.

5.193. Найти $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, если $y=2^{\sin x}\cos(\sin x)$.

Пусть $f(u)$ — дважды дифференцируемая функция. Найти y' и y'', если:

5.194. $y=f(1/x^2)$. **5.195.** $y=\ln f(e^x)$.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y', y'', если:

5.196. $y=u^v$ $(u>0)$.

◀ Имеем $\ln y=v\ln u$. Отсюда находим

$$\frac{y'}{y}=v'\ln u+\frac{v'}{u}u',$$

т. е.

$$y'=y\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right)=u^v\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right),$$

$$y''=y'\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right)+y\left(v''\ln u+\frac{v'}{u}u'+\frac{v'u'u+vu''u-vu'^2}{u^2}\right)=$$

$$=u^v\left(\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+v\frac{uu''-u'^2}{u^2}+\frac{2u'v'}{u}+v''\ln u\right).\ ▶$$

5.197. $y=\sqrt{u^2+v^2}$. **5.198.** $y=\ln\frac{u}{v}$.

Найти формулу для n-й производной заданных функций:

5.199. $y=x^m,\ m\in\mathbb{N}$. **5.200.** $y=a^{kx},\ k\in\mathbb{R}$.

5.201*. $y=\sin x$. **5.202.** $y=\ln x$. **5.203*.** $y=\cos^2 x$.

5.204. $y=\frac{1+x}{1-x}$.

Применяя разложение в линейную комбинацию более простых функций, найти указанные производные от заданных функций:

5.205. $y=\frac{2x}{x^2-1}$, найти $y^{(n)}$.

◀ Преобразуем выражение к виду

$$y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{x\pm 1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\,\frac{1}{(x\pm 1)^{n+1}}$$

(докажите!), то

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right).\ ▶$$

5.206. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$, найти $y^{(50)}$.

5.207*. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, найти $y^{(20)}$.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно. Тогда для производной n-го порядка их произведения $u(x)\,v(x)$ справедлива формула Лейбница

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

где $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$ и $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.