

◀ Логарифмируя, получим (так как $1 + \frac{1}{x} > 0$)

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Отсюда находим производные левой и правой частей

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x}.$$

Следовательно,

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right). \blacktriangleright$$

Используя предварительное логарифмирование, найти производные следующих функций:

$$5.81. y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}. \quad 5.82. y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}.$$

$$5.83. y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}.$$

$$5.84. y = x^3 \sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}.$$

$$5.85. y = x^x. \quad 5.86. y = x^{2x}.$$

$$5.87. y = \sqrt{x} \sqrt[3]{x}. \quad 5.88. y = (\ln x)^{1/x}.$$

$$5.89. y = (\sin x)^{\arcsin x}. \quad 5.90. y = x^{x^x}.$$

$$5.91. y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}. \quad 5.92^*. y = x^{x^2} + x^{2x} + 2^{x^x}.$$

Вводя промежуточные переменные, вычислить производные заданных функций:

$$5.93^*. y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^2 x}).$$

$$5.94. y = (\arccos x)^2 \ln(\arccos x).$$

$$5.95. y = \frac{e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1 - e^{-2x^2}}}.$$

$$5.96. y = \frac{1 - a^{2x}}{1 + a^{2x}} \operatorname{arctg} a^{-x}.$$

5.97*. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0, \\ ax + b, & x > 0. \end{cases}$$

Найти коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и дифференцируема в любой точке.

5.98. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1, \\ ax^2 + b, & |x| < 1. \end{cases}$$

Найти коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и дифференцируема в любой точке.

Найти производные следующих функций:

$$5.99. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}. \quad 5.100. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$5.101. y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}.$$

$$5.102. y = \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x). \quad 5.103. y = \frac{1}{\cos^n mx}.$$

$$5.104. y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b, \quad a, b > 0.$$

$$5.105. y = \ln(\ln^2 mx). \quad 5.106. y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

$$5.107. y = \log_2 \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right). \quad 5.108. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x).$$

$$5.109. y = \log_x e. \quad 5.110. y = (\sin x)^{\cos x}.$$

$$5.111. y = \sqrt{x}^{\sin^2 x}. \quad 5.112. y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}.$$

$$5.113. y = \ln(\operatorname{sh} x) + \frac{1}{2 \operatorname{sh} x}. \quad 5.114. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x).$$

$$5.115. y = e^{-x} \operatorname{sh} ax. \quad 5.116. y = \arccos(1/\operatorname{ch} x).$$

$$5.117. y = \ln|x|.$$

◀ Функция $y = \ln|x|$ определена $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, и

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \blacktriangleright$$

$$5.118. y = \arcsin \frac{1}{|x|}. \quad 5.119. y = |\sin x|.$$

$$5.120. y = |\operatorname{arctg} x|.$$

$$5.121. y = [x]x, \text{ где } [x] \text{ — целая часть числа } x.$$

◀ Функция $y = [x]x$ определена $\forall x \in \mathbb{R}$. Если $k \in \mathbb{Z}$, то $y = kx$ при $x \in [k, k+1)$. Поэтому

$$y' = k, \quad x \in (k, k+1),$$

и в точках $x = k, k \in \mathbb{Z}$:

$$f_-(k) = k-1, \quad f_+(k) = k. \blacktriangleright$$

$$5.122. y = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases} \quad 5.123. y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0. \end{cases}$$