5.124. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1, \\ 1/e, & |x|>1. \end{cases}$

5.125. $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$.

5.126. $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$.

5.127. $y=a^{x^a}$. 5.128. $y=(\log_x a)^x$

5.129. $y=\sin(\sin(\sin x))$. 5.130. $y=(1/x)^{1/x}$.

5.131. $y=\dfrac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

5.132. $y=3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

5.133. Доказать, что производная четной функции — функция нечетная, а производная нечетной функции — функция четная.

5.134. Доказать, что производная периодической функции есть функция также периодическая.

5.135*. Найти $f'(x_0)$, если $f(x)=(x-x_0)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции. Найти производные следующих сложных функций:

5.136. $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$. 5.137. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

5.138. $y=\psi(x)^{\varphi(x)}$, $\psi(x)>0$.

5.139. $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$, $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$, $\varphi(x)\neq 1$.

◄ Перейдем к натуральным логарифмам:

$$y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}.$$

Отсюда находим

$$y'=\frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}=\frac{1}{\ln\varphi(x)}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-y\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right).\ ►$$

Пусть $f(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Найти y':

5.140. $y=f(\ln x)$. 5.141. $y=\ln(f(x))$.

5.142. $y=f(e^x)e^{f(x)}$.

◄ Имеем $y'=f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}(e^xf'(e^x)+$ $+f'(x)f(e^x))$. ►

5.143. $y=f(f(x))$.

2. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически. Говорят, что функция $y=f(x)$, $x\in(a,b)$, *неявно задана* уравнением $F(x,y)=0$, если для всех $x\in(a,b)$

$$F(x,f(x))=0. \tag{3}$$

Для вычисления производной функции $y=f(x)$ следует тождество (3) продифференцировать по x (рассматривая левую часть как сложную функцию x), а затем полученное уравнение разрешить относительно $f'(x)$.

Пример 5. Уравнение $x^2+y^2=1$ неявно определяет на интервале $(-1, 1)$ две функции:

$$y_1(x)=\sqrt{1-x^2},\quad y_2(x)=-\sqrt{1-x^2}. \tag{4}$$

Найти их производные, не используя явных выражений (4).

◄ Пусть $y(x)$ — любая из этих функций. Тогда, дифференцируя по x тождество

$$x^2+y^2(x)=1,$$

получим

$$2x+2y(x)y'(x)=0.$$

Отсюда

$$y'(x)=-\frac{x}{y(x)},$$

т. е.

$$y_1'(x)=-\frac{x}{y_1(x)}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

и

$$y_2'(x)=-\frac{x}{y_2(x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\ ►$$

Пример 6. Вывести правило дифференцирования обратной функции.

◄ Если $x=f^{-1}(y)$, $y\in E$, — функция, обратная к $y=f(x)$, $x\in D$, то для всех $y\in E$ выполнено равенство

$$f(f^{-1}(y))-y=0.$$

Иначе говоря, обратная функция $x=f^{-1}(y)$ есть функция, заданная неявно уравнением

$$f(x)-y=0. \tag{5}$$

Для вычисления производной функции $x=f^{-1}(y)$ дифференцируем (5) по y:

$$f'(x(y))x'(y)-1=0,$$

откуда

$$x'(y)=\frac{1}{f'(x(y))}.\ ►$$

При неявном задании функций, а также для сложных функций будем для производной использовать также обозначения типа y'_x там, где необходимо уточнить, по какой переменной ведется дифференцирование.