Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков от заданных функций:

5.208. $y=(x^2+x+1)\sin x$, найти $y^{(15)}$.

5.209. $y=(x^2-x)e^x$, найти $y^{(20)}$.

5.210. $y=\sin x\cdot e^{-x}$, найти $y^{(5)}$.

5.211. $y=x\log_2 x$, найти $y^{(10)}$.

5.212. $y=x\,\mathrm{sh}\,x$, найти $y^{(100)}$.

5.213*. Показать, что

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi),$$

где $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{b}{a}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.

5.214. Доказать, что $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

5.215. Вычислить значение n-й производной функции $y=\frac{3x+2}{x^2-2x+5}$ в точке $x=0$.

◀ По условию имеем

$$y(x)(x^2-2x+5)=3x+2.$$

Продифференцируем это тождество n раз, применяя формулу Лейбница. Тогда (для $n\geqslant 2$) получим

$$y^{(n)}(x)(x^2-2x+5)+ny^{(n-1)}(2x-2)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}(x)\cdot 2=0,$$

откуда при $x=0$

$$5y^{(n)}(0)-2ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0,$$

или

$$y^{(n)}(0)=\frac{2}{5}ny^{(n-1)}(0)-\frac{n(n-1)}{5}y^{(n-2)}(0).$$

Мы получили рекуррентную формулу для определения n-й производной в точке $x=0$ $(n\geqslant 2)$. Значения $y(0)$ и $y'(0)$ найдем непосредственно:

$$y(0)=\frac{2}{5},\quad y'(0)=\left.\frac{-3x^2-4x+19}{(x^2-2x+5)^2}\right|_{x=0}=\frac{19}{25}.$$

Затем, полагая последовательно $n=2, 3, 4, \ldots$, с помощью рекуррентной формулы получим значения производных высших порядков. Например,

$$y''(0)=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot\frac{19}{25}-\frac{2\cdot 1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{56}{125},$$

$$y'''(0)=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot\frac{56}{125}-\frac{3\cdot 2}{5}\cdot\frac{19}{25}=-\frac{234}{625}.\ ▶$$

Применяя метод, описанный в задаче 5.215, найти производную 4-го порядка в точке $x=0$ от заданной функции:

5.216. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$. 5.217. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

5.218. Показать, что функция $y=\arcsin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)y''=xy'$.

5.219. Показать, что функция $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-4y'+4y=e^x$.

5.220. Показать, что функция $y=e^{-x}\cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{(IV)}+4y=0$.

5.221. Показать, что функция $y=x^n(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0$.

В задачах 5.222—5.226 найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

5.222. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$, $a>0$.

◀ Дифференцируя уравнение, определяющее функцию $y(x)$, получаем

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=ae^{\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отсюда

$$x+yy'=xy'-y \tag{9}$$

и, следовательно,

$$y'=\frac{x+y}{x-y}. \tag{10}$$

Дифференцируя (9) и используя найденное для y' выражение (10), получаем

$$y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.\ ▶$$

5.223. $y^2=2px$. 5.224. $y=1+xe^y$.

5.225. $y=\mathrm{tg}(x+y)$. 5.226. $e^{x-y}=xy$.

5.227. Вывести формулу для второй производной функции, обратной к заданной функции $y=f(x)$.

5.228. Доказать, что если $(a+bx)e^{y/x}=x$, то $x^3y''=(xy'-y)^2$.

Найти производные 2-го порядка следующих функций, заданных параметрически:

5.229. $x=\ln t$, $y=t^3$, $t\in(0, +\infty)$.

◀ Имеем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=3t^3\quad\text{и}\quad y''_{xx}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\cdot t'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{9t^2}{1/t}=9t^3.$$

Заметим, что в данном случае параметр t легко исключить из заданных уравнений, полагая $t=e^x$. Следовательно, выражение для y''_{xx} как функции от x имеет вид $y''_{xx}=9e^{3x}$. ▶