В общем случае, если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то y''_{xx} вычисляется по формуле

$$y''_{xx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi'(t) & \psi'(t)\\ \varphi''(t) & \psi''(t)\end{vmatrix}}{(\varphi'(t))^3}.$$

5.230. $x=\sec t$, $y=\operatorname{tg} t$, $t\in(0,\ \pi/2)$.

5.231. $x=\arcsin t$, $y=\ln(1-t^2)$, $t\in(-1,\ 1)$.

5.232. $x=\operatorname{arctg} t$, $y=\ln(1+t^2)$, $t\in(-\infty,\ +\infty)$.

5.233. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in(0,\ \pi/2)$.

5.234. Показать, что функция $y(x)$, заданная параметрически уравнениями $x=\sin t$, $y=ae^{t\sqrt{2}}+be^{-t\sqrt{2}}$, $t\in(-\pi/2,\ \pi/2)$, при любых постоянных a и b удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)\,y''_{xx}-xy'_x=2y$.

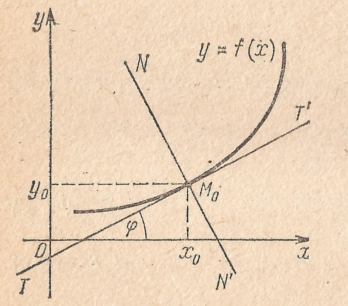

Рис. 37

4. Геометрические и механические приложения производной. Значение производной $f'(x_0)$ функции $y=f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту $k=\operatorname{tg}\varphi$ касательной TT' к графику этой функции, проведенной через точку $M_0(x_0,\ y_0)$, где $y_0=f(x_0)$ (рис. 37) (геометрический смысл производной).

Уравнение *касательной* TT' к графику функции $y=f(x)$ в его точке $M_0(x_0,\ y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Прямая NN', проходящая через точку касания M_0 перпендикулярно к касательной, называется *нормалью* к графику функции $y=f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали

$$(x-x_0)+f'(x_0)(y-y_0)=0.$$

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в данной точке, если:

5.235. $y=x^2-5x+4$, $x_0=-1$.

5.236. $y=x^3+2x^2-4x-3$, $x_0=-2$.

5.237. $y=\sqrt{x}$, $x_0=4$.

5.238. $y=\operatorname{tg}2x$, $x_0=0$.

5.239. $y=\ln x$, $x_0=1$.

5.240. $y=e^{1-x^2}$, $x_0=-1$.

5.241. Написать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2,\ 2)$ к кривой $x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}$, $t\neq 0$.

5.242. Написать уравнения касательных к кривой

$$x=t\cos t,\quad y=t\sin t,\quad t\in(-\infty,\ +\infty),$$

в начале координат и в точке $t=\pi/4$.

5.243. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^3+y^2+2x-6=0$ в точке с ординатой $y_0=3$.

5.244. Написать уравнение касательной к кривой $x^5+y^5-2xy=0$ в точке $M_0(1,\ 1)$.

5.245. Под каким углом график функции $y=e^{x/2}$ пересекает прямую $x=2$?

5.246. В какой точке M_0 кривой $y^2=2x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $4x-3y+2=0$?

5.247. Найти коэффициенты b и c в уравнении параболы $y=x^2+bx+c$, касающейся прямой $y=x$ в точке $M_0(1,\ 1)$.

5.248. Показать, что касательные к гиперболе $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат параллельны между собой.

5.249. Составить уравнение нормали к графику функции $y=-\sqrt{x}+2$ в точке пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

5.250. Составить уравнение такой нормали к параболе $y=x^2-6x+6$, которая перпендикулярна к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

5.251. В точках пересечения прямой $x-y+1=0$ и параболы $y=x^2-4x+5$ проведены нормали к параболе. Найти площадь треугольника, образованного нормалями и хордой, стягивающей указанные точки пересечения.

5.252. Показать, что нормали к развертке окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ являются касательными к окружности $x^2+y^2=a^2$.

Углом ω *между кривыми* $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в их общей точке $M_0(x_0,\ y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0.

5.253. Доказать, что $\operatorname{tg}\omega=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\,f_2'(x_0)}$.

Найти углы, под которыми пересекаются заданные кривые:

5.254. $y=x^2$ и $y=x^3$.

5.255. $y=(x-2)^2$ и $y=4x-x^2+4$.

5.256. $y=\sin x$ и $y=\cos x$, $x\in[0,\ 2\pi]$.

5.257. $x^2+y^2=8ax$ и $y^2=\frac{x}{2a-x}$.

5.258. Доказать, что сумма отрезков, отсекаемых касательной к кривой $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ на осях координат, для всех ее точек равна a.