5.259. Показать, что отрезок касательной к астроиде $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину, равную a.

5.260. Найти расстояние от начала координат до нормали к линии $y=e^{2x}+x^2$, проведенной в точке с абсциссой $x=0$.

5.261. Доказать, что отрезок касательной к *трактрисе*

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2},$$

заключенный между осью ординат и точкой касания, имеет постоянную длину.

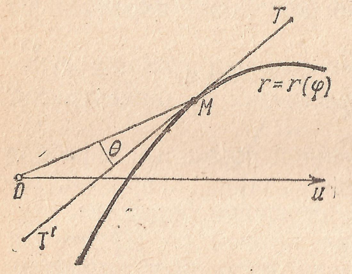

Рис. 38

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, то угол θ, образованный касательной TT' и радиус-вектором $\overline{OM}$ точки касания M (рис. 38), определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{r(\varphi)}{r'_{\varphi}}. \qquad (11)$$

5.262**. Вывести формулу (11).

5.263. Найти угол θ между касательной и радиус-вектором точки касания для логарифмической спирали $r=ae^{k\varphi}$.

5.264. Найти угол θ между касательной и радиус-вектором точки касания для лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

Если $x=x(t)$ — функция, описывающая закон движения материальной точки, то первая производная $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ есть скорость, а вторая производная $\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$ — ускорение этой точки в момент времени t (механический смысл первой и второй производных).

5.265. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид $x=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$.

а) В какие моменты времени точка находится в начале координат?

б) В какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением оси Ox?

в) В какие моменты времени ее ускорение равно нулю?

5.266. Найти скорость гармонического колебания с амплитудой a, частотой ω и начальной фазой $\varphi=0$.

5.267. Тело массой 4 движется прямолинейно по закону $x=t^2+t+1$. Определить кинетическую энергию тела в момент времени $t=5$.

5.268. В какой момент $t\in[0, 2\pi]$ надо устранить действие сил, чтобы точка, участвующая в гармоническом колебании $x=\cos 3t$, продолжала двигаться равномерно со скоростью $v=3/2$.

5.269. Точка движется по логарифмической спирали $r=e^{a\varphi}$. Найти скорость изменения полярного радиуса, если известно, что он вращается с постоянной скоростью ω.

5.270. Точка движется по окружности $r=2a\cos\varphi$. Найти скорости изменения абсциссы и ординаты точки, если полярный радиус вращается с угловой скоростью ω.

5.271. В какой точке эллипса $16x^2+9y^2=400$ ордината убывает с той же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

5.272. Радиус шара изменяется со скоростью v. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

5.273. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за время $T=8$ с. Найти угловую скорость ω в момент времени $t=32$ с после начала движения.

§ 2. Дифференциал

1. Дифференциал 1-го порядка. Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение $\Delta y(x_0, \Delta x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y(x_0, \Delta x)=A\,\Delta x+o(\Delta x). \qquad (1)$$

Главная линейная часть $A\,\Delta x$ приращения Δy называется *дифференциалом* этой функции в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается символом $dy(x_0, \Delta x)$.

Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$; при этом справедливо равенство $A=f'(x_0)$.

Это утверждение позволяет называть дифференцируемой всякую функцию, имеющую производную. Именно в таком смысле мы и употребляли это выражение в § 1.

Выражение для дифференциала имеет вид

$$dy(x_0, dx)=f'(x_0)\,dx,$$

где принято обозначение $dx=\Delta x$. Из формулы (1) следует, что если $f'(x_0)\neq 0$, то при $\Delta x\to 0$ приращение функции и ее дифференциал dy в фиксированной точке являются эквивалентными бесконечно малыми, что позволяет записать приближенное равенство:

$$\Delta y\approx dy \quad \text{при} \quad |\Delta x|\ll 1. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти приближенно значение объема V шара радиуса $r=1{,}02$ м.