◄ Так как $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$, то, полагая $r_0=1$, $\Delta r=0{,}02$ и используя формулу (2), получаем:

$$V(1{,}02)=V(1)+\Delta V(1,\ 0{,}02)\approx V(1)+V'(1)\cdot 0{,}02=$$
$$=\frac{4}{3}\pi+4\pi\cdot 0{,}02\approx 4{,}43\ \text{м}^3.$$ ►

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал $dy(x_0,\ \Delta x)$ равен приращению ординаты касательной $TT'$ к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ при приращении аргумента, равном $\Delta x$ (рис. 39).

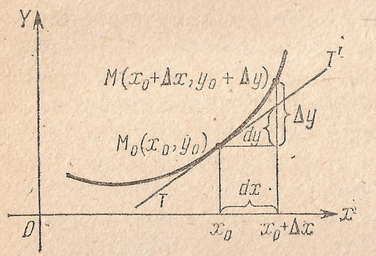


Рис. 39

**5.274.** Используя формулу $dy=y'\,dx$ и правила вычисления производных (см. § 1, п. 1), доказать следующие свойства дифференциала:

а) $d(C)=0$, где $C$ — постоянная;

б) $d(C_1u+C_2v)=C_1\,du+C_2\,dv$;

в) $d(uv)=u\,dv+v\,du$; г) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.

**5.275.** Пусть $z(x)=z(y(x))$ — сложная функция, образованная композицией функций $y=y(x)$ и $z=z(y)$. Доказать, что

$$dz(x,\ dx)=z'_y(y)\,dy(x,\ dx),$$

т. е. выражение для дифференциала сложной функции через дифференциал промежуточного аргумента имеет такую же форму, что и основное определение $dz(x,\ dx)=z'_x(x)\,dx$ (это утверждение называется *инвариантностью формы 1-го дифференциала*).

**5.276.** Доказать, что для линейной функции $y=ax+b$ приращение $\Delta y$ и дифференциал $dy$ совпадают.

**5.277.** Найти приращение $\Delta y$ и дифференциал $dy$ функции $y=x^3$, соответствующие значению аргумента $x_0=2$ и двум различным приращениям аргумента $(\Delta x)_1=0{,}1$ и $(\Delta x)_2=0{,}01$.

**5.278.** Найти приращение $\Delta S$ и дифференциал $dS$ площади $S$ квадрата, соответствующие приращению $\Delta x$ стороны $x$. С помощью рисунка геометрически истолковать $\Delta S$, $dS$ и разность $\Delta S-dS$.

**5.279.** Материальная точка $M$ движется прямолинейно по закону $s=f(t)$, где $t$ — момент времени, а $s$ — пройденный путь за промежуток времени от 0 до $t$. Дать механическое истолкование дифференциала пути $ds$, соответствующего промежутку времени $\Delta t=t_2-t_1$.



**5.280.** Используя результат предыдущей задачи и формулу (2), найти приближенно путь $\Delta s$, пройденный точкой $M$ за промежуток времени от $t_1=3$ до $t_2=4$, если закон движения точки $M$ задан формулой $s=1+\operatorname{arctg} t$. Сопоставить ответ с точным значением $\Delta s$.

**5.281.** Для функций: а) $f(x)=x^n$ и б) $\varphi(x)=\sin x$ найти значения аргумента $x$, при которых дифференциалы этих функций не являются эквивалентными их приращениям при $\Delta x\to 0$.

**5.282.** Дан отрезок $[x_0,\ x_0+\Delta x]$ изменения аргумента $x$ функции $y=f(x)$; $\Delta y$ и $dy$ — соответствующие приращение и дифференциал функции $y$. Возможны ли равенства: а) $dy=\frac{3}{2}\Delta y$, б) $dy=\Delta y$, в) $dy=\frac{1}{2}\Delta y$ на всем этом отрезке?

**5.283.** Ребра куба увеличены на 1 см. При этом дифференциал $dV$ объема $V$ куба оказался равным 12 см$^3$. Найти первоначальную длину ребер.

**5.284.** Радиус круга увеличен на 1 см. Дифференциал площади круга оказался при этом равным $6\pi$ см$^2$. Найти первоначальную величину радиуса.

Найти дифференциалы указанных функций при произвольных значениях аргумента $x$ и при произвольном его приращении $\Delta x=dx$:

**5.285.** $x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-5$.

**5.286.** $\sin x-x\cos x+4$.

**5.287.** $x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$. **5.288.** $x\ln x-x+1$.

**5.289.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-3$.

При вычислении дифференциалов неявно заданных функций удобно использовать основные свойства дифференциала, перечисленные в задачах 5.274 и 5.275.

Пример 2. Найти $dy$, если функция $y=y(x)$ задана неявно уравнением

$$\ln\frac{y}{x}=x^2y^2. \qquad (3)$$

◄ Перепишем (3) в виде тождества

$$\ln\frac{y(x)}{x}\equiv x^2y^2(x)$$

и вычислим дифференциалы левой и правой части. Используя свойства дифференциала, находим

$$d\left(\ln\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y/x}\,d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\frac{1}{y}\,dy-\frac{1}{x}\,dx,$$
$$d(x^2y^2)=x^2\,d(y^2)+y^2\,d(x^2)=2x^2y\,dy+2xy^2\,dx.$$