Приравнивая полученные выражения, получаем

$$\frac{1}{y}dy-\frac{1}{x^2}dx=2x^2y\,dy+2xy^2\,dx.$$

Из этого уравнения, линейного относительно dy, находим окончательное выражение для dy через x, y и dx:

$$dy=\frac{y}{x^2}\frac{1+2x^3y^2}{1-2x^2y^3}dx.$$

Отсюда, в частности, может быть получено и выражение для производной неявной функции:

$$y'=\frac{y}{x^2}\frac{1+2x^3y^2}{1-2x^2y^3}. \ \blacktriangleright$$

Найти дифференциалы следующих неявно заданных функций:

5.290. $y^5+y-x^2=1$. **5.291.** $x^4+y^4=x^2y^2$.

5.292. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. **5.293.** $e^y=x+y$.

5.294. $y=x+\operatorname{arctg}y$. **5.295.** $y=\cos(x+y)$.

5.296. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. **5.297.** $\cos(xy)=x$.

В задачах 5.298—5.302 произвести указанные приближенные вычисления, используя замену приращения Δy подходящей функции $y=f(x)$ дифференциалом dy этой функции при малой абсолютной величине приращения Δx аргумента x.

5.298. Вычислить приближенно: а) $\arcsin 0{,}05$; б) $\operatorname{arctg}1{,}04$; в) $\ln 1{,}2$.

5.299. Обосновать приближенную формулу

$$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

и вычислить по этой формуле $\sqrt[3]{25}$.

5.300. Найти приближенное значение функции $f(x)=e^{x^2-x}$ при $x=1{,}2$.

5.301*. Найти приближенное выражение для приращения ΔV объема V прямого кругового цилиндра с высотой h при изменении радиуса основания r на величину Δr.

5.302*. По закону Клапейрона объем V, занимаемый газом, давление газа p и абсолютная температура T связаны формулой $pV=RT$, где R — газовая постоянная. Найти приближенное выражение для приращения ΔV объема V при изменении давления p на величину Δp, считая неизменной температуру T.

2. Дифференциалы высших порядков. Рассмотрим дифференциал $dy(x,\Delta_1x)=f'(x)\Delta_1x$ как функцию x при фиксированном $\Delta x=\Delta_1x$. Предполагая, что функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема в точке x, найдем дифференциал от $dy(x,\Delta_1x)$ при $\Delta x=\Delta_2x$:

$$d(dy(x,\Delta_1x))\big|_{x,\ \Delta x=\Delta_2x}=f''(x)\Delta_1x\,\Delta_2x.$$

Значение полученного выражения при $\Delta_1x=\Delta_2x=dx$ называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом 2-го порядка* функции $y=f(x)$ и обозначается символом $d^2y(x,dx)$.

Таким образом,

$$d^2y=f''(x)\,dx^2.$$

Аналогично

$$d^3y=d(d^2y)=f'''(x)\,dx^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Найти дифференциалы 2-го порядка указанных функций y аргумента x:

5.303. $y=a\sin(bx+c)$. **5.304.** $y=3^{-x^2}$.

5.305. $y=\frac{\sin x}{x}$. **5.306.** $y=ax^2+bx+c$.

5.307. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

5.308. $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

5.309. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

5.310. $y=\arcsin(a\sin x)$.

5.311. Доказать, что второй дифференциал сложной функции $z(x)=z(y(x))$ выражается через дифференциалы dy и d^2y промежуточного аргумента формулой

$$d^2z=z''_{yy}dy^2+z'_y d^2y.$$

◀ Для первого дифференциала имеем (см. задачу 5.275) $dz=z'_y dy$, откуда, дифференцируя еще раз (по x, но используя инвариантность формы первого дифференциала), получим:

$$d^2z=d(dz)=d(z'_y dy)=z'_y d(dy)+dy\cdot d(z'_y)=z'_y d^2y+z''_{yy}dy^2. \ \blacktriangleright$$

Этот пример показывает, что дифференциалы 2-го порядка (и более высоких порядков) не обладают инвариантностью формы, свойственной дифференциалам 1-го порядка (см. задачу 5.275).

Найти дифференциалы 2-го порядка следующих неявно заданных функций:

5.312. $xy+y^2=1$.

5.313. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

5.314. $x^3+y^3=y$. **5.315.** $x=y-a\sin y$.