Правило применимо и в случае, когда $a=\infty$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}$ (т. е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

◄ Используя формулу (1), получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+25x^2}\cdot 5}=\frac{2}{5},$$

поскольку $e^{2x}\longrightarrow 1$ и $\dfrac{1}{1+25x^2}\longrightarrow 1$ при $x\longrightarrow 0$. ►

В некоторых случаях раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ может потребовать неоднократного применения правила Лопиталя—Бернулли.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$ (т. е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$).

◄ Применяя дважды формулу (1), получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=0.\ ►$$

На каждом этапе применения правила Лопиталя—Бернулли следует пользоваться упрощающими отношение тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с любыми другими приемами вычисления пределов.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$ (т. е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

◄ Используем формулу (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}.$$

Освободим знаменатель дроби от множителя $\cos^2 x$, поскольку он имеет предел 1 при $x\longrightarrow 0$. Развернем стоящую в числителе разность кубов и освободим числитель от сомножителя $(1+\cos x+\cos^2 x)$, имеющего предел 3 при $x\longrightarrow 0$. После этих упрощений получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Применяем снова (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}.$$

Используя первый замечательный предел, получаем окончательный ответ 1/2, уже не прибегая вновь к правилу Лопиталя—Бернулли. ►

Раскрыть неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$:

5.329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$. **5.330.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

5.331. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$, $m\neq n$, $a\neq 0$.

5.332. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$, $a\neq b$, $c\neq d$.

5.333. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

5.334. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$. **5.335.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$.

5.336. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **5.337.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

5.338. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$. **5.339.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.

5.340. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. **5.341.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

5.342. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$. **5.343.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

5.344. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^m}$, $m>0$. **5.345.** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

5.346. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. **5.347.** $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

5.348. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Раскрытие неопределенностей типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$. Для вычисления $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x)$, где $f(x)$ — бесконечно малая, а $\varphi(x)$ — бесконечно большая при $x\longrightarrow a$ (раскрытие неопределенности типа $0\cdot\infty$), следует преобразовать произведение к виду $\dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ (неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$) или к виду $\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ (неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$) и далее использовать правило Лопиталя—Бернулли.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ (раскрыть неопределенность типа $0\cdot\infty$).