◀ Имеем: $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2}=-\frac{2}{\pi}.\ ▶$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — бесконечно большие при $x\to a$ (раскрытие неопределенности типа $\infty-\infty$), следует преобразовать разность к виду $f(x)\left(1-\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$, затем раскрыть неопределенность $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\infty$. Если же $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, то получаем неопределенность типа $\infty\cdot 0$, рассмотренную выше.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)$ (раскрыть неопределенность типа $\infty-\infty$).

◀ Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}}{1}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{1}=$$

$$=6\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=+\infty.\ ▶$$

Раскрыть неопределенности типа $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$:

5.349. $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{1/x}-1)$. **5.350.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

5.351. $\lim\limits_{x\to\infty}x^n e^{-x}$. **5.352.** $\lim\limits_{x\to+0}x\ln^3 x$.

5.353. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

5.354. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)\operatorname{ctg}x$. **5.355.** $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$.

5.356. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$. **5.357.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{x}$.

5.358. $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$. **5.359.** $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

5.360. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

5.361. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

5.362. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$. **5.363.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)$.

Раскрытие неопределенностей типа 0^0, ∞^0, 1^∞. Во всех трех случаях имеется в виду вычисление предела выражения $(f(x))^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ есть в первом случае бесконечно малая, во втором случае — бесконечно большая, в третьем случае — функция, имеющая предел, равный единице. Функция же $\varphi(x)$ в первых двух случаях является бесконечно малой, а в третьем случае — бесконечно большой.

Поступаем следующим образом. Логарифмируя предварительно $y=(f(x))^{\varphi(x)}$, получаем равенство

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x)\tag{2}$$

и находим предел $\ln y$, после чего находится и предел y. Во всех трех случаях $\ln y$ в силу (2) является неопределенностью типа $0\cdot\infty$ (проверьте!), метод раскрытия которой изложен выше.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ (раскрыть неопределенность типа 1^∞).

◀ Введем обозначение $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$. Тогда $\ln y=2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ является неопределенностью типа $\infty\cdot 0$. Преобразуя выражение $\ln y$ к виду $\ln y=2\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1/x}$, находим по правилу Лопиталя — Бернулли

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^2.\ ▶$$

Раскрыть неопределенности типа 0^0, ∞^0, 1^∞:

5.364. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$. **5.365.** $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$.

5.366. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$. **5.367.** $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

5.368. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$. **5.369.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{1/x}$.

5.370. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\ln x}$. **5.371.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.