5.372. $\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$. 5.373. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

5.374. $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$. 5.375. $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

5.376. $\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

5.377. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$. 5.378. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. Формула Тейлора. Если функция $y=f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(a)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$ точки a, то для всякого $x\in U_\delta(a)$ справедлива формула Тейлора (порядка n)

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

(остаточный член в форме Лагранжа). Таким образом, формула Тейлора порядка n позволяет представить функцию $y=f(x)$ в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена.

В частности, при $a=0$ имеем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

(формула Маклорена).

5.379. Многочлен $2x^3-3x^2+5x+1$ разложить по степеням двучлена $x+1$.

5.380. Для многочлена x^4+4x^2-x+3 написать формулу Тейлора 2-го порядка в точке $a=1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение θ, соответствующее следующим значениям аргумента: а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=2$.

5.381. Пусть $P(x)$ — многочлен 4-й степени, $P(2)=-1$, $P'(2)=0$, $P''(2)=2$, $P'''(2)=-12$, $P^{(IV)}(2)=24$. Вычислить $P(-1)$, $P'(0)$ и $P''(1)$.

Для заданных функций написать формулу Маклорена n-го порядка:

5.382. $y=e^x$. 5.383. $y=\sin x$. 5.384. $y=\cos x$.

5.385. $y=\ln(1+x)$. 5.386*. $y=\operatorname{arctg} x$. 5.387. $y=(1+x)^\alpha$.

Используя формулы Маклорена, полученные в задачах 5.382—5.387, написать первые n членов формулы Маклорена (без остаточного члена) для следующих функций:

5.388*. $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$. 5.389*. $y=\sin^2 x$. 5.390. $y=\sin\frac{5x}{2}$.

5.391. $y=\ln(4+x^2)$. 5.392. $y=\sqrt[3]{8+x^2}$.

5.393. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\frac{x}{x-1}$ в точке $a=2$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

5.394. Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $y=\operatorname{tg} x$ в точке $a=0$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 2-й степени.

5.395. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\arcsin x$ в точке $a=0$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

5.396. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $a=1$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

Формула Тейлора широко используется при вычислении значений функции с заданной степенью точности. Пусть, например, требуется вычислить значение функции $f(x)$ в точке x_0 с абсолютной погрешностью, не превосходящей ε, если известно значение этой функции и ее производных в точке a. Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x_0)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x_0-a)+\ldots+\frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!}(x_0-a)^{n_0},$$

где n_0 — минимальный из номеров n, для которых

$$|R_{n+1}(x_0)|<\varepsilon.$$

Пример 7. Вычислить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001.

◄ Применяя формулу Маклорена к функции $f(x)=e^x$, получаем

$$e=f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1.$$

Наименьшее значение n, удовлетворяющее условию $\frac{e^\theta}{(n+1)!}<0{,}001$, где $0<\theta<1$, равно $n_0=6$. Следовательно,

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{6!}=2{,}718. ►$$

5.397. Вычислить с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001, приближенные значения следующих чисел: