а) $\sin 1$; б) $\sqrt{e}$; в) $\ln 1{,}05$; г) $\sqrt[5]{33}$.

5.398. Выяснить происхождение приближенных равенств:

а) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2, \quad |x|<1;$

б) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2, \quad |x|<1,$

и найти их предельные абсолютные погрешности.

Остаточный член в формуле Тейлора может быть записан в форме Пеано

$$R_{n+1}(x)=o(|x-a|^n),$$

использование которой полезно при вычислении пределов.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}$.

◄ Так как $1-\cos^3 x=(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)$, а $5x^2+7x^3 \sim 5x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{5x^2}.$$

Заменяя $\cos x$ его разложением по формуле Маклорена $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2},$$

поскольку $\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$. Окончательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\frac{3}{10}. \quad ►$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)}$.

◄ По формуле Тейлора

$$\sin(2x-2)=\sin 2(x-1)=\frac{2(x-1)}{1!}+o(|x-1|),$$

$$\sin(3x-3)=\frac{3(x-1)}{1!}+o(|x-1|).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)-o(|x-1|)}{4(x-1)+o(|x-1|)}.$$

Отбрасывая бесконечно малые высших порядков, т. е. переходя в числителе и в знаменателе к эквивалентным бесконечно малым при $x\to 1$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{4(x-1)}=-\frac{1}{4}. \quad ►$$

5.399. Показать, что разложение по формуле Маклорена для функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, e^x-1 и $\ln(1+x)$ можно записать в виде $x+o(|x|)$ и что при $x\to 0$ все эти функции эквивалентны бесконечно малой $\alpha(x)=x$ (и, следовательно, эквивалентны между собой).

5.400. Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3+x^4}$.

§ 4. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функции. Экстремум. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале (a, b), если из неравенства $x_1<x_2$, где $x_1, x_2\in(a, b)$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)>f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x)>0$ при всех $x\in(a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на (a, b); если же $f'(x)<0$ при всех $x\in(a, b)$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

В простейших случаях область определения функции $y=f(x)$ можно разбить на конечное число *интервалов монотонности*. Каждый из интервалов монотонности ограничен *критическими точками*, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует.

Если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что для всякой точки $x\neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ (или $f(x)<f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой минимума* (*максимума*) функции $y=f(x)$, а число $f(x_0)$ — *минимумом* (*максимумом*) этой функции. Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует, т. е. x_0 — критическая точка этой функции.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Достаточные условия экстремума непрерывной функции. 1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ критической точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Если при этом в интервалах $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ производная $f'(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка экстремума, причем, если $f'(x)>0$ при $x\in(x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка максимума, а если $f'(x)<0$ при $x\in(x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x)>0$ при $x\in(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка минимума. Если же $f'(x)$ при $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, сохраняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

2) Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в критической точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Если $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка минимума. Если же $f''(x_0)=0$, то требуются дополнительные исследования.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2}$.