5.458. $y = x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$. **5.459.** $y = x \operatorname{arcsec} x$.

5.460. Доказать, что график целой рациональной функции $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $n \geqslant 2$, не имеет никаких асимптот.

4. Построение графиков функций. Для построения графика функции $y = f(x)$ с непрерывной второй производной (всюду в области определения функции кроме, быть может, конечного числа точек) сначала проводим элементарное исследование, выясняющее некоторые особенности функции (если они имеются): симметрия, периодичность, постоянство знака, нули, точки пересечения с осью Oy, точки разрыва и т. п. Затем, используя первую и вторую производные, находим точки экстремума и перегиба, интервалы монотонности и выпуклости, а также асимптоты.

Пример 4. Построить график функции $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◄ Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 0$, всюду неотрицательна и равна нулю лишь в точке $x = 1$. Ее исследование проведено в примерах 1—3. Результат этого исследования полезно свести в одну таблицу — объединение таблиц 4.1 и 4.2. При этом следует вычислить и записать в соответствующую клетку таблицы $f'(3) = -1/27$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в точке перегиба. Рекомендуется также вычислить $f'_-(1) = -1$ и $f'_+(1) = 1$ — угловые коэффициенты левой и правой касательных в точке $(1, 0)$ графика. Эти данные помогают точнее построить график функции, приведенный на рис. 44. ►

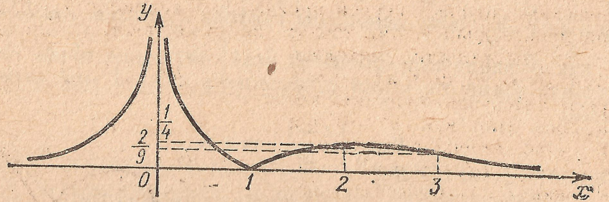

Рис. 44

Пример 5. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

◄ Функция определена и непрерывна на всей действительной оси и обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Находим первую производную

$$y' = \frac{3x^2-4x+1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}} = \frac{x-\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}.$$

Приравнивая ее нулю, получаем $x = 1/3$. Таким образом, критическими точками функции являются: $x_1 = 0$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1$ (в точках $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$ производная не существует). Эти точки разбивают область определения на четыре интервала монотонности $(-\infty, 0)$, $(0, 1/3)$, $(1/3, 1)$, $(1, +\infty)$. Так как $y'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/3) \cup (1, +\infty)$, то $y(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty, 1/3)$ и $(1, +\infty)$. Аналогично рассуждая, находим, что $y'(x) < 0$ при $x \in (1/3, 1)$ и, следовательно, функция на этом интервале убывает. В точке $x_2 = 1/3$ функция достигает максимума ($y_{\max}(1/3) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0{,}529$), а в точке $x_3 = 1$ — минимума ($y_{\min}(1) = 0$).

Таблица 4.3

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	>0	не сущ.	>0	0	<0	не сущ.	>0
y''	>0	не сущ.	<0			не сущ.	<0
y	↗ вып. вниз	0	↗	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$	↘	0	↗ вып. вверх
			вып. вверх				

Находим теперь вторую производную $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$.

Критическими точками первой производной являются $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$ (вторая производная в этих точках не существует). Получаем три интервала выпуклости исходной функции: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. В первом интервале функция выпукла вниз (так как $y'' > 0$ при $x < 0$), а во втором и третьем — выпукла вверх ($y'' < 0$ при $x > 0$, кроме точки $x = 1$). Следовательно, $(0, 0)$ является точкой перегиба графика функции (с вертикальной касательной).

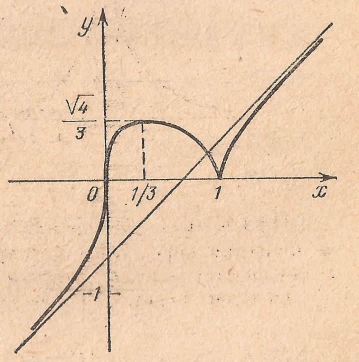

Рис. 45

Результаты проведенных исследований сводим в таблицу (таблица 4.3).

Для уточнения поведения функции в окрестности точки $x = 1$ заметим, что $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$, т. е. в точке $(1, 0)$ графика функции левая и правая касательные совпадают, образуя вертикальную касательную.

Наконец, определим асимптоты. Так как функция непрерывна на всей оси, то вертикальные асимптоты отсутствуют. Для определения наклонных асимптот находим сначала

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = 1,$$