Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y=\frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Находим вторую производную:

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{2(3-x)}{x^4}, & x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1);\\ \frac{2(x-3)}{x^4}, & x\in(1,\ +\infty).\end{cases}$$

Следовательно, критическими точками первой производной являются точки $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$. При этом в точках x_1 и x_2 вторая производная не существует (в частности, $f''_-(1)=4$, а $f''_+(1)=-4$), а в точке x_3 она равна нулю.

Получаем четыре интервала выпуклости: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ +\infty)$. Исследуя знак второй производной в каждом из этих интервалов, выводим, что график функции является выпуклым вниз на интервалах $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(3,\ +\infty)$ и выпуклым вверх на интервале $(1,\ 3)$. Следовательно, точки x_2 и x_3 являются точками перегиба графика функции, а x_1 не является. Полученные результаты удобно свести в следующую таблицу:

Таблица 4.2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ 3)$	3	$(3,+\infty)$
$f(x)$	вып. вниз	$+\infty$	вып. вниз	0	вып. вверх	$\frac{2}{9}$	вып. вниз
$f''(x)$	>0	не сущ.	>0	не сущ.	<0	0	>0

▶

Найти интервалы выпуклости графика функции $y=f(x)$, точки перегиба и угловые коэффициенты k касательных в точках перегиба:

5.440. $y=x^7+7x+1$. **5.441.** $y=x^4+6x^2$.

5.442. $y=\sqrt[3]{(x-2)^5}+3$. **5.443.** $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$.

5.444. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. **5.445.** $y=xe^{2x}+1$.

5.446. $y=x\ln|x|$. **5.447.** $y=x^3\ln x+1$.

5.448. При каких значениях a и b точка $(1,\ 3)$ является точкой перегиба кривой $y=ax^3+bx^2$?

5.449. При каком выборе параметра h *кривая вероятности*

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2},\quad h>0,$$

имеет точки перегиба с абсциссами $x=\pm 6$?

5.450. Показать, что кривая $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

5.451*. Показать, что точки перегиба кривой $y=x\sin x$ лежат на кривой $y^2(4+x^2)=4x^2$.

3. Асимптоты. Пусть для функции $y=f(x)$ существует такая прямая, что расстояние от точки $M(x,\ f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат. Тогда такая прямая называется *асимптотой* графика функции.

Если при этом координата x точки M стремится к конечному числу a, то полупрямая $x=a$ ($y>0$ либо $y<0$) является вертикальной асимптотой. Для существования вертикальной асимптоты в точке $x=a$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ был равен бесконечности.

Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Если же координата x точки M стремится к $+\infty$ или $-\infty$, то имеем наклонную асимптоту $y=kx+b$, для существования которой необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \text{ и } \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b.$$

При этом указанные пределы могут быть различными при $x\longrightarrow+\infty$ (для правой наклонной асимптоты) и при $x\longrightarrow-\infty$ (для левой наклонной асимптоты).

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Так как функция непрерывна на всей оси, кроме точки $x=0$, то вертикальная асимптота может существовать лишь в этой точке.

Имеем:

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{|x-1|}{x^2}=+\infty,$$

и, следовательно, прямая $x=0$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты. Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{|x-1|}{x^2}}{x}=0=k \text{ и } \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{|x-1|}{x^2}-0\cdot x\right)=0=b,$$

то прямая $y=0\cdot x+0=0$ является одновременно и правой и левой наклонной (в данном случае горизонтальной) асимптотой. ▶

Найти асимптоты графиков указанных функций:

5.452. $y=\sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$. **5.453.** $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$.

5.454. $y=\sqrt{|x^2-3|}/x$. **5.455.** $y=3x+\operatorname{arctg}5x$.

5.456. $y=\frac{\ln(x+1)}{x^2}+2x$. **5.457.** $y=\frac{\sin x}{x}$.