Наконец, находим асимптоты. Если $t \to -\infty$, то $x \to 0$, а $y \to -\infty$, т. е. $x=0$ — вертикальная асимптота. Отметим, что при приближении точек кривой к этой асимптоте их координата по x остается отрицательной. Если $t \to +\infty$, то $x \to +\infty$, а $y \to 0$,

Таблица 4.4

t	x	y	y'_x	y''_{xx}	Поведение кривой
$(-\infty, -\sqrt{2})$	<0	<0	<0	<0	Выпукла вверх, убывает, $x=0$ — вертикальная асимптота
$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$	$-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$		>0	Точка перегиба
$(-\sqrt{2}, -1)$	<0	<0	<0	>0	Выпукла вниз, убывает
-1	$-\frac{1}{e}$	$-e$	не сущ.	не сущ.	Точка возврата
$(-1, 1)$			>0	<0	Выпукла вверх, возрастает, точка (0, 0) лежит на кривой
1	e	$\frac{1}{e}$	0		Максимум
$(1, \sqrt{2})$	>0	>0	<0	<0	Выпукла вверх, убывает
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$		0	Точка перегиба
$(\sqrt{2}, +\infty)$	>0	>0	<0	>0	Выпукла вниз, убывает, $y=0$ — горизонтальная асимптота

т. е. $y=0$ — горизонтальная асимптота. Точки кривой при приближении к ней имеют положительную координату по y.

Результаты исследования сводим в таблицу (таблица 4.4) и делаем все необходимые выводы в правой ее колонке. Кривая приведена на рис. 46. ▶

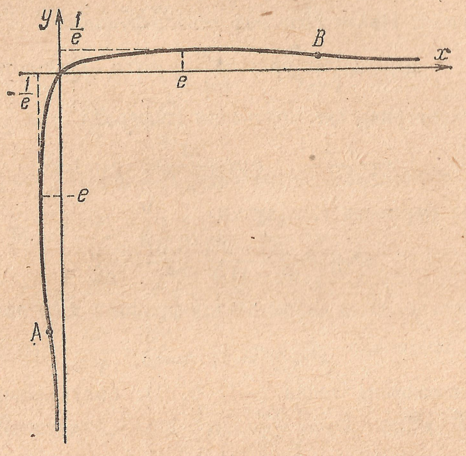

Рис. 46

5.525. $x=t^2-2t, \ y=t^2+2t, \ t \in \mathbb{R}$.

5.526. $x=t+e^{-t}, \ y=2t+e^{-2t}, \ t \in \mathbb{R}$.

5.527. $x=a\cos^3 t, \ y=a\sin^3 t, \ t \in [0, 2\pi)$.

5.528. $x=t^3-3\pi, \ y=t^3-6\operatorname{arctg} t, \ t \in \mathbb{R}$.

Построить следующие кривые, заданные в полярной системе координат:

5.529. $r=a\sin 3\varphi$. 5.530. $r=a(1+\cos\varphi)$.

5.531. $r=\sqrt{\pi/\varphi}$. 5.532. $r^2=2a^2\cos 2\varphi$.

§ 5. Векторные и комплексные функции действительной переменной

1. Определение вектор-функции действительной переменной. Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{a}(t) \in \mathcal{V}_3$, то говорят, что на множестве D задана *вектор-функция* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ действительной переменной t.

Задание вектор-функции $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ равносильно заданию трех числовых функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ — координат вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}=a_x(t)\,\boldsymbol{i}+a_y(t)\,\boldsymbol{j}+a_z(t)\,\boldsymbol{k},$$

или, кратко, $\boldsymbol{a}=(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$. Если вектор $\boldsymbol{a}$ является радиус-вектором точки $M(x, y, z)$, то соответствующую вектор-функцию принято обозначать:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\,\boldsymbol{i}+y(t)\,\boldsymbol{j}+z(t)\,\boldsymbol{k}.$$