855. Показать, что при положительных значениях x имеет место неравенство

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2.$$

856. Определить коэффициенты p и q квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ так, чтобы этот трехчлен имел минимум $y=3$ при $x=1$. Объяснить полученный результат геометрически.

857. Доказать неравенство

$$e^x>1+x \quad \text{при } x\neq 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=e^x-(1+x).$$

Обычным приемом находим, что эта функция имеет единственный минимум $f(0)=0$. Следовательно,

$$f(x)>f(0) \quad \text{при} \quad x\neq 0,$$

т. е.

$$e^x>1+x \quad \text{при} \quad x\neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказать неравенства:

858. $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$ при $x>0$.

859. $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ при $x\neq 0$.

860. $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ при $x>0$.

861. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

862. Кусок проволоки данной длины l согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.

863. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

864. Требуется устроить прямоугольную площадку так, чтобы с трех сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвертой стороной примыкала к длинной каменной стене. Какова наивыгоднейшая (в смысле площади) форма площадки, если имеется l погонных метров сетки?

865. Из квадратного листа картона со стороной a требуется сделать открытую прямоугольную коробку наибольшей вместимости, вырезав по углам квадраты и загнув выступы получившейся крестообразной фигуры.

866. Открытый бак с квадратным основанием должен вмещать v литров. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество жести?

867. Какой из цилиндров с данным объемом имеет наименьшую полную поверхность?

868. В данный шар вписать цилиндр с наибольшим объемом.

869. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

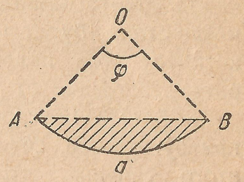
870. В данный шар вписать конус с наибольшим объемом.

871. В данный шар вписать прямой круговой конус с наибольшей боковой поверхностью.

872. Около данного цилиндра описать прямой конус наименьшего объема (плоскости и центры их круговых оснований совпадают).

873. Какой из конусов, описанных около данного шара, имеет наименьший объем?

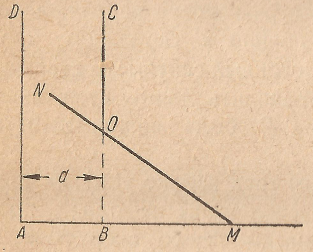
874. Полоса жести шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (черт. 26). Каков должен быть центральный угол φ, чтобы вместимость желоба была наибольшей?



Черт. 26.

875. Из круглого листа вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости.

876. Открытый сосуд состоит из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой; толщина стенок постоянна. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости на него пошло минимум материала?



Черт. 27.

877. Определить наименьшую высоту $h=OB$ двери вертикальной башни $ABCD$, чтобы через эту дверь в башню можно было внести жесткий стержень MN длины l, конец которого M скользит вдоль горизонтальной прямой AB. Ширина башни $d<l$ (черт. 27).

878. На координатной плоскости дана точка $M_0(x_0;\ y_0)$, лежащая в первой четверти. Провести через эту точку прямую так, чтобы треугольник, образованный ею с положительными полуосями координат, имел наименьшую площадь.

879. В данный эллипс вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

880. В сегмент параболы $y^2=2px$, отсекаемый прямой $x=2a$, вписать прямоугольник наибольшей площади.

881. На кривой $y=\frac{1}{1+x^2}$ найти точку, в которой касательная составляет с осью OX наибольший по абсолютной величине угол.

882. Гонцу нужно добраться из пункта A, находящегося на одном берегу реки, в пункт B, находящийся на другом. Зная, что скорость движения на берегу в k раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом гонец должен пересечь реку для того, чтобы