

достичь пункта B в кратчайшее время. Ширина реки — h , расстояние между пунктами A и B (вдоль берега) — d .

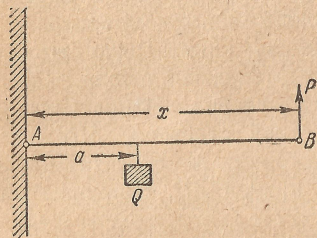
883. На прямолинейном отрезке $AB = a$, соединяющем два источника света A (силы p) и B (силы q), найти точку M , освещаемую слабее всего (освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

884. Лампа висит над центром круглого стола радиуса r . При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшая? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

885. Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина x и высота y этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление: а) на сжатие, б) на изгиб?

Примечание. Сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения, а на изгиб — произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты.

886. Однородный стержень AB , который может вращаться около точки A (черт. 28), несет груз Q кг на расстоянии a см от точки A и удерживается в равновесии вертикальной силой P , приложенной к свободному концу B стержня. Погонный сантиметр стержня весит q кг. Определить длину стержня x так, чтобы сила P была наименьшей, и найти P_{\min} .



Черт. 28.

887*. Центры трех вполне упругих шаров A, B, C расположены на одной прямой. Шар A массы M со скоростью v ударяет в шар B , который, получая известную скорость, ударяет в шар C массы m .

Какова должна быть масса шара B , чтобы скорость шара C оказалась наибольшей?

888. Имея N одинаковых электрических элементов, мы можем различными способами составить из них батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученные группы (числом $\frac{N}{n}$) — параллельно. Сила тока, даваемого такой батареей, определяется формулой

$$I = \frac{Nn\varepsilon}{NR + n^2r},$$

где ε — электродвижущая сила одного элемента, r — его внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление.

Определить, при каком значении n батарея даст ток наибольшей силы.

889. Определить, при каком диаметре y круглого отверстия в плотине секундный расход воды Q будет иметь наибольшее значение, если $Q = cy\sqrt{h-y}$, где h — глубина нижней точки отверстия (h и эмпирический коэффициент c — постоянным).

890. Если x_1, x_2, \dots, x_n — результаты равнооточных измерений величины x , то ее наимвероятнейшим значением является то, при котором сумма квадратов погрешностей

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

имеет наименьшее значение (принцип наименьших квадратов).

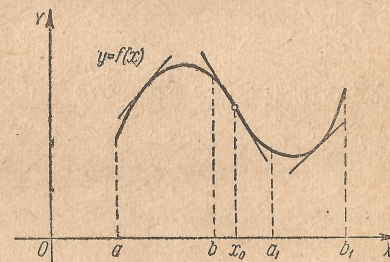
Доказать, что наимвероятнейшее значение величины x есть среднее арифметическое результатов измерений.

§ 2. Направление вогнутости. Точки перегиба

1°. Вогнутость графика функции. Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ вогнут вниз на интервале (a, b) (вогнут вверх на интервале (a_1, b_1)), если при $a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1 < x < b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала (a, b) (или интервала (a_1, b_1)) (черт. 29). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства

$$f''(x) < 0 \quad (f''(x) > 0).$$

Вместо того чтобы сказать, что график вогнут вниз, говорят также, что он направлен выпуклостью вверх. Аналогично график, вогнутый вверх, называют также направленным выпуклостью вниз.



Черт. 29.

2°. Точки перегиба. Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется точкой перегиба (черт. 29).

Для абсциссы точки перегиба x_0 графика функций $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются критическими точками 2-го рода. Критическая точка 2-го рода x_0 является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_0 - \delta < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta$, где δ — некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны; и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример 1. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой Гаусса

$$y = e^{-x^2}.$$

Решение. Имеем:

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

и

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$