$\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x'$, $x'' \in D$ из неравенства $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема Кантора. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

**1.404.** Доказать, что если $y = f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, то она:

а) ограничена на $[a, b]$;

б) достигает на $[a, b]$ своих верхней и нижней граней (теорема Вейерштрасса);

в) принимает на любом интервале $(a', b') \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(a')$ и $f(b')$ (теорема Коши).

**1.405.** Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция ограничена на $[a, +\infty)$.

**1.406.** Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

принимает на любом отрезке $[0, a]$ все промежуточные значения между $f(0)$ и $f(a)$, однако не является непрерывной на $[0, a]$.

**1.407.** Доказать, что всякий многочлен нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень.

**1.408.** На языке «$\varepsilon$-$\delta$» сформулировать утверждение: функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве $D$, но не является равномерно непрерывной на этом множестве. В качестве примера рассмотреть следующие функции:

а) $f(x) = 1/x$, $D = (0, 1]$;

б) $f(x) = \lg x$, $D = (0, 10]$;

в) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$, $D = (0, 1]$.

**1.409.** Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

**1.410.** Показать, что неограниченная функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Следующие функции исследовать на равномерную непрерывность на заданных множествах:

**1.411.** $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$, $D = [-1, 1]$.



**1.412.** $f(x) = \ln x$, $D = (0, 1]$.

**1.413.** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $D = (0, \pi]$.

**1.414.** $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$, $D = (0, 1]$.

**1.415.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D = \mathbb{R}$.

**1.416.** $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, +\infty)$.

**1.417.** $f(x) = x \sin x$, $D = [0, +\infty)$.

## § 5. Комплексные числа

**1. Алгебраические операции над комплексными числами.** *Комплексными числами* называются всевозможные упорядоченные пары $z = (x, y)$ действительных чисел, для которых следующим образом определены операции сложения и умножения:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (2)$$

Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Действительные числа $x$ и $y$ называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $z = (x, y)$ и обозначаются символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются *равными* в том и только в том случае, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Из определений (1) и (2) следует, что всякое комплексное число $(x, y)$ может быть записано следующим образом:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \quad (3)$$

Если теперь комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествить[1] с действительными числами $x$, а число $(0, 1)$ обозначить символом $i$, то равенство (3) принимает вид

$$z = x + iy$$

и называется *алгебраической формой* комплексного числа $z = (x, y)$.

**1.418.** Доказать, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*коммутативность сложения*);

б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*ассоциативность сложения*);

в) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (*коммутативность умножения*);

г) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (*ассоциативность умножения*);

д) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (*закон дистрибутивности*).

[1] То есть установить взаимно однозначное соответствие $(x, 0) \leftrightarrow x$ между множествами $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathbb{R}$. Из (1) и (2) следует, что это соответствие «сохраняет операции»:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \leftrightarrow x_1 + x_2,$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \leftrightarrow x_1 x_2.$$