1.419. Доказать, что:

а) $\forall z_1, z_2 \neq 0 \, \exists z \, (z_2 z = z_1)$

(число z называется *частным* от деления z_1 на z_2 и обозначается символом $\dfrac{z_1}{z_2}$);

б) если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

В задачах 1.420—1.429 выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме.

1.420. $(1-2i)(2+i)^2 + 5i$.

◄ Задача состоит в том, чтобы заданное комплексное число представить в форме

$$(1-2i)(2+i)^2 + 5i = x + iy.$$

Для этого можно воспользоваться непосредственно формулами (1) и (2), однако этот же результат можно получить проще следующим образом. Как показывают свойства операций, перечисленные в задаче 1.418, при сложении и умножении комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, с ними можно обращаться как с биномами вида $a+ib$, учитывая дополнительно, что $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Поэтому

$$(2+i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i,$$

$$(1-2i)(2+i)^2 = (1-2i)(3+4i) = 3 - 2i - 8i^2 = 11 - 2i,$$

откуда окончательно получаем

$$(1-2i)(2+i)^2 + 5i = 11 - 2i + 5i = 11 + 3i. \ ►$$

1.421. $(2+3i)(3-i)$. **1.422.** $(1+2i)^3$.

1.423. $(1-i)^3 - (1+i)^3$. **1.424.** $(2i - i^2)^2 + (1-3i)^3$.

1.425. $\dfrac{2-i}{1+i}$.

◄ Результат может быть получен непосредственно по формуле из задачи 1.419. Заметим, однако, что $(1+i)(1-i) = 2$ есть действительное число. Поэтому, умножая числитель и знаменатель заданной дроби на $1-i$, находим:

$$\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i. \ ►$$

1.426. $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i}$. **1.427.** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

1.428. $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i} - \dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$. **1.429.** $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Найти действительные решения следующих уравнений:

1.430. $(1+i)x + (-2+5i)y = -4 + 17i$.

1.431. $12((2x+i)(1+i) + (x+y)(3-2i)) = 17 + 6i$.

Решить следующие системы линейных уравнений:

1.432. $(3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1 + 3i,$
$(4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7.$

1.433. $(2+i)z_1 + (2-i)z_2 = 6,$
$(3+2i)z_1 + (3-2i)z_2 = 8.$

1.434. $iz_1 + z_2 = i,$
$(i+1)z_1 + (1-i)z_2 = (1+i).$

Если на плоскости введена декартова прямоугольная система координат Oxy, то всякому комплексному числу $z = x + iy$ может быть поставлена в соответствие некоторая точка $M(x, y)$ с абсциссой x и ординатой y.

При этом говорят, что точка $M(x, y)$ *изображает* комплексное число $z = x + iy$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ось Ox — *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*.

Число $r = \sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается символом $|z|$. Модуль числа z равен расстоянию точки M, изображающей это число, от начала координат.

Всякое решение φ системы уравнений

$$\cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}, \quad \sin\varphi = y/\sqrt{x^2+y^2} \tag{4}$$

называется *аргументом* комплексного числа $z = x + iy \neq 0$. Все аргументы числа z различаются на целые кратные 2π и обозначаются единым символом $\operatorname{Arg} z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось Ox до совпадения с радиус-вектором $\overline{OM}$ точки M (при этом $\varphi > 0$, если поворот совершается против часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае). Значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$, называется *главным значением* аргумента и обозначается символом $\arg z$.

В некоторых случаях главным значением аргумента называется значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$.

Из соотношений (4) следует, что для всякого комплексного числа z справедливо равенство

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

называемое *тригонометрической формой* числа z.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

◄ Имеем

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4, \quad \cos\varphi = -1/2, \quad \sin\varphi = \sqrt{3}/2,$$

поэтому главное значение аргумента равно $\arg z = 2\pi/3$ и, следовательно, $z = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. ►

Следующие комплексные числа представить в тригонометрической форме и изобразить точками на комплексной плоскости: