1.435. $-i$. 1.436. $1-i\sqrt{3}$. 1.437. $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.438. $\frac{1-i}{1+i}$. 1.439*. $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

1.440. $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$. 1.441. $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

Комплексное число $x-iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z=x+iy$ и обозначается символом $\bar{z}$.

Доказать следующие равенства:

1.442. $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$ и $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$.

1.443. $\bar{(\bar{z})}=z$. 1.444. $|\bar{z}|=|z|$. 1.445. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

1.446. $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ и $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. 1.447. $z\bar{z}=|z|^2$.

1.448. Вычислить:

а) $z_1\bar{z}_2$ и $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$, если $z_1=1-i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{3}+i$,

б) $z_1\bar{z}_2$ и $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, если $z_1=3+2i$, $z_2=2+2i$.

1.449. Пусть $p(z)$ — произвольный многочлен с действительными коэффициентами. Доказать, что для любого $z\in\mathbb{C}$ верно равенство $\overline{p(z)}=p(\bar{z})$.

Решить следующие уравнения:

1.450. $|z|-z=1+2i$. 1.451. $|z|+z=2+i$.

1.452. Доказать равенства и выяснить их геометрический смысл:

а) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$;

б) $\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg}(z_1z_2)$, $\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ (равенства б) понимаются в смысле равенства множеств— см. с. 11).

Выяснить геометрический смысл следующих преобразований комплексной плоскости:

1.453. $z\to z-2$. 1.454. $z\to z+(3-i)$. 1.455. $z\to iz$.

1.456. $z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$. 1.457. $z\to -z$. 1.458. $z\to 2z$.

1.459. $z\to\frac{z}{1-i}$. 1.460. $z\to\bar{z}$.

1.461. Доказать, что:

а) величина $|z_1-z_2|$ равна расстоянию на комплексной плоскости между точками M_1 и M_2, изображающими комплексные числа z_1 и z_2;

б) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ и $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$ (неравенства треугольника). Каков геометрический смысл этих неравенств?

1.462. Доказать тождества:

а) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ (каков его геометрический смысл?);

б)* $|z_1|+|z_2|=\left|\frac{z_1+z_2}{2}+\sqrt{z_1z_2}\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}-\sqrt{z_1z_2}\right|$.

В задачах 1.463—1.473 дать геометрическое описание множеств всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

1.463. $\operatorname{Re} z\geqslant 0$. 1.464. $0\leqslant\operatorname{Im} z<1$. 1.465. $|\operatorname{Im} z|\leqslant 2$.

1.466. $|z|<1$. 1.467. $|z+i|=2$.

1.468. $1<|z+2|\leqslant 2$. 1.469. $|z|>1-\operatorname{Re} z$.

1.470. $|z-i|=|z+2|$. 1.471. $0<\arg z\leqslant\pi/4$.

1.472. $|\pi-\arg z|<\pi/4$. 1.473. $z=\bar{z}$.

1.474. Пусть $z\neq -1$. Доказать, что $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}=0\Leftrightarrow|z|=1$.

Пусть φ — произвольное действительное число. Символом $e^{i\varphi}$ обозначается комплексное число $\cos\varphi+i\sin\varphi$. С помощью этого обозначения всякое комплексное число $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ может быть записано в *показательной форме*

$$z=|z|e^{i\varphi}.$$

Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

1.475. $\frac{7+24i}{5}$. 1.476. $5-12i$. 1.477. $-3-4i$.

1.478. $-2+i$. 1.479. $\sin\alpha-i\cos\alpha$.

1.480. $\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$.

1.481. Доказать, что символ $e^{i\varphi}$ обладает следующими свойствами:

а) $\forall n\in\mathbb{Z}\,(e^{i2\pi n}=1)$; б) $\overline{e^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}$;

в) $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ и $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

1.482. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные действия над ними:

а) z_1z_2, $\frac{z_1^2}{z_2}$, если $z_1=2\sqrt{3}-2i$, $z_2=3-3\sqrt{3}i$;

б) $z_1^2\bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, если $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$.