1.483. Доказать *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.484. Доказать *формулу Муавра*: если $z=re^{i\varphi}$, то

$$r^n=r^ne^{in\varphi},$$

или, в тригонометрической форме,

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Используя формулу Муавра, вычислить следующие выражения:

1.485. $(1+i)^{10}$. **1.486.** $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. **1.487.** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

1.488. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

1.489. Доказать равенства:

а) $(1+i)^n=2^{n/2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$;

б) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6}-i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

1.490. Используя формулы Эйлера, выразить через косинусы и синусы кратных дуг функции:

а) $\cos^3\varphi$; б) $\sin^3\varphi$.

Используя формулу Муавра, выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ следующие функции:

1.491. $\cos 3\varphi$. **1.492.** $\sin 3\varphi$.

1.493. $\cos 4\varphi$. **1.494.** $\sin 4\varphi$.

Пусть $a=re^{i\varphi}$ — фиксированное комплексное число. Тогда уравнение $z^n=a$, $n\in\mathbb{N}$, имеет в точности n различных решений $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, причем эти решения даются формулой

$$z_k=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$
$$k=0, 1, \ldots, n-1$$

(здесь $\sqrt[n]{r}$ — действительное положительное число). Числа z_k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, называются *корнями n-й степени* из комплексного числа a и обозначаются символом $\sqrt[n]{a}$.

Пример 2. Найти все корни 3-й степени из числа $a=-2+2i\sqrt{3}$.

◀ Так как $a=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, то

$$(\sqrt[3]{a})_k=\sqrt[3]{4}\,e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right),\quad \text{где } k=0,\ 1,\ 2.$$

При $k=0$: $(\sqrt[3]{a})_0=\sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)$.

При $k=1$: $(\sqrt[3]{a})_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{8\pi}{9}+i\sin\dfrac{8\pi}{9}\right)$.

При $k=2$: $(\sqrt[3]{a})_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{14\pi}{9}+i\sin\dfrac{14\pi}{9}\right)$. ▶

1.495. Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2-й, 3-й и 4-й степени из единицы.

Найти все значения корней:

1.496. $\sqrt{i}$. **1.497.** $\sqrt[4]{-1}$. **1.498.** $\sqrt[9]{-9}$.

1.499. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$. **1.500.** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

1.501. $\sqrt[5]{-1-i}$.

1.502. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$. **1.503.** $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.

1.504. Доказать, что квадратные корни из комплексного числа могут быть найдены по формуле

$$\sqrt{z}=\sqrt{x+iy}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}+i\,\mathrm{sgn}\,y\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

Использование показательной формы комплексных чисел во многих случаях значительно упрощает вычисления.

Пример 3. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$S(\varphi)=\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi,\quad \varphi\neq 2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z}.$$

◀ Так как $\sin\varphi=\mathrm{Im}\,e^{i\varphi}$, то, используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$S(\varphi)=\mathrm{Im}\,e^{i\varphi}+\mathrm{Im}\,e^{i2\varphi}+\ldots+\mathrm{Im}\,e^{in\varphi}=\mathrm{Im}\left(e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\ldots+e^{in\varphi}\right)=$$
$$=\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\varphi}(1-e^{in\varphi})}{1-e^{i\varphi}}=\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\varphi+i\frac{n}{2}\varphi}\left(e^{-i\frac{n}{2}\varphi}-e^{i\frac{n}{2}\varphi}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)}=$$
$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,\mathrm{Im}\,e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.\ ▶$$