1.236. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3} \right)$.

1.237. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+3n+1}}{n-1}$. **1.238.** $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$.

1.239. $\lim\limits_{n \to \infty} n^{3/2} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-2})$. **1.240.** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

1.241. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

1.242. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. **1.243.** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin (n^2)}{n-1}$.

1.244. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

1.245. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{5^n} \right)$.

1.246. Доказать, что если последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ бесконечно малая и $\forall n \in \mathbb{N}\, (x_n \neq 0)$, то последовательность $(1/x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ бесконечно большая.

Установить, какие из заданных последовательностей являются бесконечно большими:

1.247. $x_n = 2^{\sqrt{n}}$. **1.248.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

1.249. $x_n = n \sin \frac{\pi n}{2}$. **1.250.** $x_n = \lg (\lg n)$, $n \geqslant 2$.

Найти все предельные точки последовательности:

1.251. $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$. **1.252.** $x_n = \cos \frac{\pi n}{4}$.

1.253. $x_n = \arcsin \frac{(-1)^n}{2}$.

1.254. Доказать:

а) $\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n + \varliminf\limits_{n \to \infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n \to \infty} x_n + \varlimsup\limits_{n \to \infty} y_n$;

б) $\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n + \varlimsup\limits_{n \to \infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n + \varlimsup\limits_{n \to \infty} y_n$.

Для каждой из следующих последовательностей $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ найти $\inf \{x_n\}$, $\sup \{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n$:

1.255. $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. **1.256.** $x_n = \frac{n+1}{n} \cos^2 \frac{\pi n}{4}$.

1.257. $x_n = (-1)^n (2n+1)$.

1.258. $x_n = \frac{n+2}{n-2} \sin \frac{\pi n}{3}$, $n \geqslant 2$.

1.259. $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n}$.

1.260. Доказать, что равенство $\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n = \varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n$ является необходимым и достаточным условием существования предела последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

§ 4. Предел функции. Непрерывность

1. Предел функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D. Число a называют *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in D$ из условия $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Критерий Коши. *Для того чтобы функция* $y = f(x)$ *имела предел в точке* x_0, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, *как только* $|x' - x_0| < \delta(\varepsilon)$ *и* $|x'' - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Говорят, что число a есть *предел функции* $y = f(x)$ *при* x, *стремящемся к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $A(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - a| < \varepsilon$, как только $|x| > A(\varepsilon)$.

В дальнейшем используются следующие замечательные пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e, \tag{2}$$

где $e = 2{,}71828\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

Наряду с введенным выше понятием предела функции используют также следующее понятие *одностороннего* предела. Число a называют *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *справа* (*слева*) и пишут $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = a$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = a \right)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ $(-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0)$ следует $|f(x) - a| < \varepsilon$. Аналогично вводится понятие одностороннего предела на бесконечности $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right.$ и $\left. \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right)$.

В задачах 1.261—1.263, пользуясь только определением предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$\delta(\varepsilon)$			