1.305. $\lim\limits_{x\to0} x\,\mathrm{ctg}\,\pi x$. **1.306.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\arcsin x}{4x}$.

1.307. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$. **1.308.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$, $\alpha\neq\beta$.

1.309. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\mathrm{ctg}\,x\right)$. **1.310.** $\lim\limits_{x\to\alpha}\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2\alpha}\sin\frac{x-\alpha}{2}$.

1.311. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$. **1.312.** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x$.

1.313. $\lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{\sin\alpha^n}{\sin^m\alpha}$, $n, m\in\mathbb{Z}$.

1.314. $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin 2\alpha-\mathrm{tg}\,2\alpha}{\alpha^3}$.

1.315. $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}$. **1.316.** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos 5x}{1-\cos 4x}$.

Доказать следующие соотношения:

1.317.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$.

1.318*. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

1.319*. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$.

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, используется замечательный предел (2).

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

◀ Имеем

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x}=\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}}=\lim_{t=\frac{-2}{2+x}\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2+x}\cdot 3x=-6,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2x}=e^{-6}$$

(здесь использована непрерывность композиции непрерывных функций). ▶

Используя замечательный предел (2), а также результаты задач 1.317—1.319, вычислить пределы:

1.320. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$. **1.321.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

1.322. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$. **1.323.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\right)^{3/x}$.

1.324. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2+x)-\ln x)$. **1.325.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1.326. $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{1/x}-1)$. **1.327.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{a^x-a}{x-1}$.

1.328. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\log_a x-1}{x-a}$. **1.329.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

1.330. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin x}$. **1.331.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$.

1.332. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{1/x}$. **1.333.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

1.334. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ в том и только в том случае, когда для любой последовательности аргументов $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ значений функции сходится к a.

Используя результат задачи 1.334, доказать, что для следующих функций не существует $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$:

1.335. $f(x)=\cos x$, $x_0=\infty$. **1.336.** $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $x_0=0$.

1.337. $f(x)=x-[x]$, $x_0=\infty$.

Найти односторонние пределы:

1.338. $\lim\limits_{x\to3\pm0}\frac{x-3}{|x-3|}$. **1.339.** $\lim\limits_{x\to2\pm0}\frac{2+x}{4-x^2}$.

1.340. $\lim\limits_{x\to\pm0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$. **1.341.** $\lim\limits_{x\to2\pm0}7^{\frac{1}{2-x}}$.

1.342. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\mathrm{arctg}\,x$. **1.343.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[1/x]$.

1.344. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm0}\frac{|\mathrm{tg}(4x-\pi)|}{2x-\frac{\pi}{2}}$. **1.345.** $\lim\limits_{x\to2\pi\pm0}\frac{x^2}{\cos x-1}$.

1.346. Доказать, что предел функции $y=f(x)$ в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы и они совпадают.

2. **Бесконечно малые и бесконечно большие.** Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.