Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — сравнимые бесконечно малые при $x\to x_0$, и пусть, для определенности, существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$. Тогда:

а) Если $C\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка. В частности, при $C=1$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут $\alpha\sim\beta$.

б) Если $C=0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более *высокого порядка*, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha=o(\beta)$. Если при этом существует действительное число $r>0$ такое, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r}\neq 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой *порядка r* относительно $\beta(x)$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\infty$. Подобно тому как это сделано выше для бесконечно малых, вводится понятие сравнимых бесконечно больших и их классификация.

1.347. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$, то найдется такое число $\delta>0$ и константы C_1 и C_2, что

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow C_1\beta(x)\leqslant\alpha(x)\leqslant C_2\beta(x).$$

1.348. Доказать, что $\alpha\sim\beta$ в том и только в том случае, когда $\alpha-\beta=o(\alpha)$ или $\alpha-\beta=o(\beta)$.

Определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)=x$, при $x\to 0$:

1.349. $\alpha(x)=\dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$. **1.350.** $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$.

1.351. $\alpha(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$. **1.352.** $\alpha(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$.

1.353. $\alpha(x)=\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$.

1.354. $\alpha(x)=3\sin^3x-x^4$.

1.355. $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$.

1.356. $\alpha(x)=\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$.

1.357. $\alpha(x)=3^{\sqrt{x}}-1$. **1.358.** $\alpha(x)=2^x-\cos x$.

1.359. Доказать, что $\alpha(x)-\beta(x)$ имеет 2-й порядок малости относительно x при $x\to 0$, если:

а) $\alpha(x)=1/(1+x)$, $\beta(x)=1-x$;

б) $\alpha(x)=\sqrt{a^2+x}$, $\beta(x)=a+\dfrac{1}{2a}x$ $(a\neq 0)$;

в) $\alpha(x)=(1+x)^n$, $\beta(x)=1+nx$ $(n\in\mathbb{N})$.

Приближенно вычислить следующие выражения:

1.360. $1/1{,}03$. **1.361.** $\sqrt{25{,}3}$.

1.362. $(1{,}03)^5$. **1.363.** $(0{,}97)^4$.

1.364. Доказать, что если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Используя результат задачи 1.364, вычислить пределы:

1.365. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

◀ Так как $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sim\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\ln(1-x)\sim(-x)$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x}=-1. ▶$$

1.366. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\lg x}$. **1.367.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$.

1.368. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$. **1.369.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x^2}{\arcsin 3x\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$.

1.370. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\sin^2x+x\operatorname{tg}7x}$.

1.371. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}$.

Определить порядок роста бесконечно большой $A(x)$ относительно $B(x)=x$ при $x\to\infty$:

1.372. $A(x)=x^3+150x+10$.

1.373. $A(x)=\sqrt{x^2+3x+5}+|x|$.

1.374. $A(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$. **1.375.** $A(x)=\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$.

1.376. $A(x)=\dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$. **1.377.** $A(x)=\dfrac{x^{5/2}}{x^{7/3}+1}$.

3. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва. Функция $y=f(x)$ с областью определения D называется *непрерывной* в точке x_0, если выполнены следующие три условия:

а) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0\in D$;