вне ее (в начальный момент точка M находится в положении $A(b, 0)$). В частном случае $a=b$ соответствующая кривая называется *кардиоидой*.

12. *Гипоциклоида* $x=(b-a)\cos t+a\cos\frac{b-a}{a}t$, $y=(b-a)\sin t-a\sin\frac{b-a}{a}t$, $t\in[0, +\infty)$ (рис. 24). Характеристическое свойство: кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по окружности $x^2+y^2=b^2$, оставаясь внутри ее (в начальный момент точка M находится в положении $A(b, 0)$). В частном случае $a=b/4$ эта кривая совпадает с астроидой.

13. *Полукубическая парабола* $y^2=ax^3$ (рис. 25).

14. *Петлевая парабола* $ay^2=x(x-a)^2$ (рис. 26).

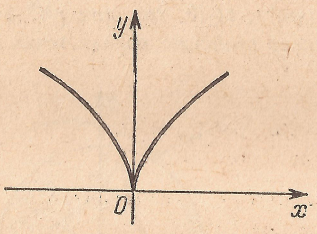

Рис. 25

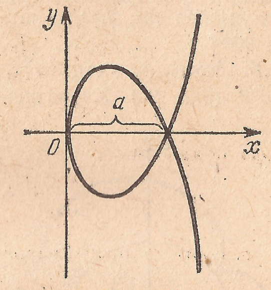

Рис. 26

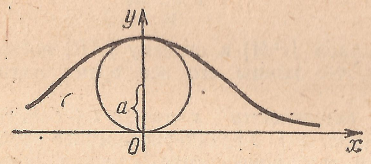

Рис. 27

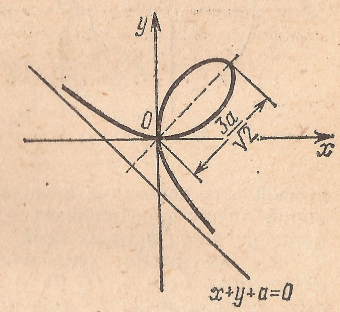

Рис. 28

15. *Локон Аньези* $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ (рис. 27).

16. *Декартов лист* $x^3+y^3-3axy=0$ (рис. 28).

§ 4. Поверхности и кривые в пространстве

1. Уравнения поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат. Говорят, что поверхность S в системе координат $Oxyz$ имеет уравнение

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности S в том и только в том случае, когда ее координаты x, y и z удовлетворяют соотношению (1). Если, в частности, $F(x, y, z)=f(x, y)-z$, то уравнение (1) может быть записано в виде

$$z=f(x, y), \tag{2}$$

и в этом случае поверхность S совпадает с графиком функции двух переменных $f(x, y)$.

Кривая Γ в пространстве в общем случае определяется как линия пересечения некоторых поверхностей S_1 и S_2 (определяемых неоднозначно), т. е. заданием системы двух уравнений

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0. \tag{3}$$

Пример 1. Вывести уравнение поверхности, каждая точка которой расположена вдвое ближе к точке $A(2, 0, 0)$, чем к точке $B(-4, 0, 0)$.

◀ Если S — поверхность, заданная условиями задачи, то $M(x, y, z)\in S$ в том и только в том случае, когда $\rho(M, B)=2\rho(M, A)$, или

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}.$$

Отсюда получаем

$$(x+4)^2+y^2+z^2=4((x-2)^2+y^2+z^2),$$
$$3x^2-24x+3y^2+3z^2=0$$

или, выделяя полный квадрат в слагаемых, содержащих x,

$$(x-4)^2+y^2+z^2=16. \tag{4}$$

Уравнение (4) и есть искомое уравнение поверхности. Из него видно, что заданная поверхность S есть сфера радиуса 4 с центром в точке $M_0(4, 0, 0)$. ▶

Пример 2. Исследовать форму кривой Γ, заданной уравнениями

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=36, \\ y+z=0. \end{cases} \tag{5}$$

Определить вид ее проекции на плоскость Oxy.

◀ Кривая Γ задана как линия пересечения сферы $(x-1)^2+y^2+z^2=36$ с плоскостью $y+z=0$ и, следовательно, есть окружность. Так как центр сферы $C(1, 0, 0)$ лежит в плоскости сечения $y+z=0$, то центр окружности совпадает с точкой C, а ее радиус равен радиусу сферы, т. е. $R=4$.

Установим форму проекции окружности Γ на плоскость Oxy. Исключая z из системы (5), получаем $(x-1)^2+2y^2=36$, или $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$. Отсюда заключаем, что искомая проекция — эллипс, главные оси которого сонаправлены с осями Ox и Oy, центр находится в точке $C'(1, 0)$, а полуоси равны $a=6$, $b=3\sqrt{2}$. ▶

Установить, какие геометрические образы определяются заданными уравнениями:

2.344. $z+5=0$. **2.345.** $x-2y+z-1=0$.

2.346. $x^2+y^2+z^2=4$. **2.347.** $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=16$.