$$\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln|1+\sqrt{5}| - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}$$

$$\pi\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt = \pi\left[\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{\frac{1}{2}}\right] = \underbrace{\pi\left[\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+2\sqrt{5})\right]}_{\text{ответ}}$$

Пример. Найти площадь поверх, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой.

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$ (площадь, образованную вращением одной арки)

Решение

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad S_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$$

$$\begin{cases} x_t' = 1 - \cos t \\ y_t' = \sin t \end{cases}$$

$$x_t'^2 + y_t'^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t$$

$$x_t'^2 + y_t'^2 = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$x_t'^2 + y_t'^2 = 2(1-\cos t) = 2\left(\sin^2\frac{t}{2} + \cancel{\cos^2\frac{t}{2} - \cos^2\frac{t}{2}} + \sin^2\frac{t}{2}\right)$$

$$\boxed{x_t'^2 + y_t'^2 = 4\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$ циклоида

у нас $a = 1$