Пример 1.

Найдите длину дуги кривой $y^2=x^3$ от $x=0$ до $x=1$ $(y\geq 0)$.

Решение

$$y=x^{3/2}$$

$$y=\sqrt{x^3},\quad x\geq 0$$

$$y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\,\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\Big|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}}-1\right]=\frac{8}{27}\left[\frac{13}{4}\,\frac{\sqrt{13}}{2}-1\right]=$$

$$=\frac{8}{27}\left[\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right]$$

Ответ: $\frac{8}{27}\left[\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right]$

Пример 2.

Найти длину дуги кривой $\begin{cases}x=\cos^5 t\\ y=\sin^5 t\end{cases}$

от $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$

Решение

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt\qquad\begin{cases}x_t'=-5\cos^4 t\sin t\\ y_t'=5\sin^4 t\cos t\end{cases}$$